【体験授業用教材】 M1JK

本科２期９月度（Ａターム）１回目

Ｚ会東大進学教室／Ｚ会京大進学教室【体験授業用教材（抜粋版）】

高１東大数学K

［選抜］高１東大・京大数学演習

目 次

はじめに

1．　Z会の教室　数学の指導方針

数学で他の人より一歩先にいくには

はじめて見たタイプの問題に対応できる力

が必要不可欠です。しかし，この力は，一朝一夕で身につけることはできず，勉強の仕方を間違うと思うように力がつきません。

そこで，数学科では，この力を養成するために，授業において，問題を数多く解くことに重点をおかず，演習価値の高い良質な問題を一問一問丁寧に解説し，「なぜそうなるのか」がわかることに重点をおいた指導を行います。さらに，一つの問題を様々な角度から考えるので，考え方の視野が広がっていくのも特徴です。なお，公式・定理などの重要事項についても場面に応じてわかりやすく解説することで，知識面の対策も行っていきます。

また，添削課題を通して，繰り返し答案作りを行うことで，自分の考えたことを採点者に正確に伝える力，いわゆる「記述力」も身につけていきます。

2．　授業について

予習

授業は，時間が限られています。その時間を最大限有効に活かすよう準備をしておきましょう。たとえば，テキストに目を通してから授業に臨むと，授業での吸収はより高まります。また，しっかりとした予習をしていれば，演習のときに手が動かないということはないでしょう。

授業内

授業は答え合わせの場ではありません。自身の解答と先生が示す正解が違うとき，どうしてそうなったのかを考える姿勢をつねにもち，授業に臨んでください。また，講義を集中して聞くことはもちろんですが，きちんとノートも取りましょう。そのとき，ただ正解を書き写すだけでなく，後の復習に役立つように，先生が示したポイントなども書き込んでおきましょう。

復習

授業で学習したことをきちんと定着させるためにも復習は欠かせません。おすすめの復習は，授業で扱った問題を解き直してみることです。着眼のポイントや方針の立て方等思い出しながら，実際に手を動かしてみましょう。さらに，余力がある人は授業で扱わなかった問題も解いてみましょう。

添削課題

最低限身につけておきたいという問題で構成されていますので，復習が追いつかないというときでも，この添削課題には，かかさず取り組みましょう。添削が返却されたら，間違えた箇

所はなぜこの解答に至るのかという過程と照らし合わせて見直し，同じタイプの問題が次回出題された時に正解が導けるようにしておきましょう。

３． テキストの構成

●要点

公式や定理の紹介や例題などで構成されています。授業前に目を通しておきましょう。

※　要点は章ごとに必ずあるわけではありません。

●問題

授業を行うときに中心に扱うコーナーです。次の２つのパートに分かれています。

演習：授業のほとんどは，このパートにある問題の演習と解説を行います。

自習：補充問題です。自宅で復習用として練習してください。

※　自習の問題は章ごとに必ずあるわけではありません。

●添削課題

添削課題の取り組み方については，スタッフ･講師からの指示もしくは受講マニュアルに従ってください。

●問題のレベルについて

Ｚ会の教室のテキストでは，問題のレベルを★の個数によって３段階で表します。

★：基礎　　★★：標準　　★★★：応用（発展）

※映像授業をご受講の皆様

・ 映像授業では予習不要です。映像で問題演習の指示が出たら，映像を停止して問題に取り組みましょう。
・ 授業をご受講いただく前に，各講座のオリエンテーション映像をご覧ください。

要点

例題 1

次の等式が成り立つことを証明しなさい.

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

■考え方

▼ 等式の証明

等式 $A=B$ を証明するのは，次のような方法があります.

I. **両辺を変形して，等しいことを示す.**

$$(\text{左辺})=A=\cdots(\text{変形する})\cdots=T$$
$$(\text{右辺})=B=\cdots(\text{変形する})\cdots=T$$

II. **差が 0 となることを示す.**

$$(\text{左辺})-(\text{右辺})=A-B=\cdots(\text{変形する})\cdots=0$$

よって，$A=B$

III. **A を変形して B になることを示す.**

$$(\text{左辺})=A=\cdots(\text{変形する})\cdots=B=(\text{右辺})$$

よって，$A=B$

IV. **B を変形して A になることを示す.**

$$(\text{右辺})=B=\cdots(\text{変形する})\cdots=A=(\text{左辺})$$

よって，$A=B$

原則は，I～IV の中から使いやすい方法を選んで証明すればよい.

■解答

ここでは，I の方法を用いて証明してみることにする.

≪証明≫

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$ の左辺と右辺を別々に計算すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=(a^2+b^2)(x^2+y^2)\\&=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)\\&=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2\\(\text{右辺})&=(ax+by)^2+(ay-bx)^2\\&=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+a^2y^2-2abxy+b^2x^2\\&=a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2\end{aligned}$$

よって

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

が成り立つ.　　（証明終）

<考察>

この問題を解くとき，次のような解答をするものが出てきます．

$\boxed{\text{誤答例}}$

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$ の左辺と右辺をそれぞれ展開すると

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(x^2+y^2)&=(ax+by)^2+(ay-bx)^2\\ a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)&=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+a^2y^2-2abxy+b^2x^2\\ a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2&=a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2\\ a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2&=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2\end{aligned}$$

よって

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

が成り立つ．（証明終）

どこが間違っているのでしょう．それは

≪例題１≫

次の等式が成り立つはずだから本当に等号が成り立つかということを証明しなさい．

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

という問題文なのに，$\boxed{\text{誤答例}}$ ではいきなり

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

と書いてしまって，はじめから等号が成り立つことになっているからです．

このような誤りをしないためにも等式の証明方法 I〜IV を練習しましょう．

<参考>

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$ を**ラグランジュの恒等式**といいます．

例題 2

次の問いに答えなさい.

(1) $a+b+c=0$ のとき，$a^3+b^3+c^3-3abc=0$ を証明しなさい.

(2) $abc=1$ のとき，$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=a+b+c$ を証明しなさい.

■考え方

▼ 条件つきの等式の証明

条件式があるときの「等式の証明」では，条件を利用して証明すべき式をできるだけ文字の種類の少ない式に変形します.

I. 条件「$\boldsymbol{a+b+c=0}$」の利用

(i) $a=-(b+c)$ を代入する.

(ii) $b+c=-a$ を代入する.

(iii) $A(a+b+c)=0$ の式を導く.

II. 条件「$\boldsymbol{abc=1}$」の利用

(i) $a=\dfrac{1}{bc}$ を代入する.

(ii) $1=abc$ を代入する.

(iii) $\dfrac{a}{a}$，$\dfrac{b}{b}$，$\dfrac{c}{c}$ をかける.

などのパターンがあります．この中から使いやすい方法を選んで証明します.

■解答

(1) ≪証明≫

$a+b+c=0$ より，

$$
\begin{aligned}
&(\text{左辺})\\
=&a^3+b^3+c^3-3abc\\
=&(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\
=&0\cdot(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\
=&0\\
=&(\text{右辺})
\end{aligned}
$$

よって

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

が成り立つ.　　　　　　　　（証明終）

(2) ≪証明≫

$abc=1$ より

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\\
&= \frac{c+a+b}{abc}\\
&= \frac{c+a+b}{1}\\
&= a+b+c\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

よって

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=a+b+c$$

が成り立つ.　　　　　　　　（証明終）

例題 3

次の問いに答えなさい.

(1) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき, $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$ を証明しなさい.

(2) $a:b:c=x:y:z$ のとき, $a^2(x+y+z)^2=x^2(a+b+c)^2$ を証明しなさい.

■考え方

▼ 条件つきの等式の証明

引き続き, 条件があるときの「等式の証明」を扱います.

III. 条件「比例式」の利用

(i) $\boldsymbol{a:b=c:d}$

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のように, 比の値が等しいことを示す等式を**比例式**といいます.

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ は $a:b=c:d$ とも表されます. 比の値を k とおくと

$$a:b=c:d \iff \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \iff a=bk,\ c=dk\ (bd \fallingdotseq 0)$$

(ii) $\boldsymbol{a:b:c=p:q:r}$

$\dfrac{a}{p}=\dfrac{b}{q}=\dfrac{c}{r}$ は, $a:b:c=p:q:r$ とも書き, a, b, c の連比といいます.

$$a:b:c=p:q:r \iff \frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}=k$$
$$\iff a=pk,\ b=qk,\ c=rk,\ (pqr \fallingdotseq 0)$$

■解答

(1) ≪証明≫

条件式より $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと

$x=ak,\ y=bk,\ z=ck$

これを両辺に代入して

$$
\begin{aligned}
&(\text{左辺})=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\\
&=(a^2+b^2+c^2)\{(ak)^2+(bk)^2+(ck)^2\}\\
&=(a^2+b^2+c^2)(a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2)\\
&=(a^2+b^2+c^2)\cdot k^2(a^2+b^2+c^2)\\
&=k^2(a^2+b^2+c^2)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\text{右辺})=(ax+by+cz)^2\\
&=\{a\cdot(ak)+b\cdot(bk)+c\cdot(ck)\}^2\\
&=(a^2k+b^2k+c^2k)^2\\
&=\left\{k(a^2+b^2+c^2)\right\}^2\\
&=k^2(a^2+b^2+c^2)^2
\end{aligned}
$$

よって

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$

が成り立つ. (証明終)

(2) ≪証明≫

条件式より, $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}=k$ とおくと

$a=xk,\ b=yk,\ c=zk$

これを両辺に代入して

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})&=a^2(x+y+z)^2\\
&=(xk)^2\cdot(x+y+z)^2\\
&=x^2k^2(x+y+z)^2\\
(\text{右辺})&=x^2(a+b+c)^2\\
&=x^2\{(xk)+(yk)+(zk)\}^2\\
&=x^2(xk+yk+zk)^2\\
&=x^2\{k(x+y+z)\}^2\\
&=x^2k^2(x+y+z)^2
\end{aligned}
$$

よって

$a^2(x+y+z)^2=x^2(a+b+c)^2$

が成り立つ. (証明終)

発展例題 1

次の問いに答えなさい．

(1) $a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ のとき，a, b, c のうち，少なくとも 1 つは 1 であることを証明しなさい．

(2) $a+b+c=a^2+b^2+c^2=3$ のとき，$a=b=c=1$ であることを証明しなさい．

■考え方

▼ 重要な同値変形

◆ $a=c$ または $b=c \iff (a-c)(b-c)=0$

◆ $a=c$ かつ $b=c \iff (a-c)^2+(b-c)^2=0$

■解答

(1) ≪証明≫

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ の両辺に abc をかけると

$$ab+bc+ca=abc$$

よって

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1)&=(a-1)(bc-b-c+1)\\&=a(bc-b-c+1)-(bc-b-c+1)\\&=abc-ab-ca+a-bc+b+c-1\\&=abc-ab-bc-ca+a+b+c-1\\&=abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1\\&=abc-abc+1-1\\&=0\end{aligned}$$

したがって

$$a-1=0 \quad \text{または} \quad b-1=0 \quad \text{または} \quad c-1=0$$

すなわち，a, b, c の少なくとも 1 つは 1 である．（証明終）

(2) ≪証明≫

$$\begin{aligned}(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2&=a^2-2a+1+b^2-2b+1+c^2-2c+1\\&=(a^2+b^2+c^2)-2(a+b+c)+3\\&=3-2\cdot3+3\\&=0\end{aligned}$$

よって

$$a-1=0 \quad \text{かつ} \quad b-1=0 \quad \text{かつ} \quad c-1=0$$

すなわち，$a=b=c=1$ である．（証明終）

MEMO

問題

■演習

★
【1】　次の等式が成り立つことを証明しなさい.

(1) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

(2) $(a^2+b^2)^2-(a-b)^2(a+b)^2=4a^2b^2$

(3) $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

(4) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

★
【2】　次の等式が成り立つことを証明しなさい.

(1) $(3a+4b)^2+(2a-6b)^2=(3a-4b)^2+(2a+6b)^2$

(2) $(ax-by)^2-(ay-bx)^2=(a^2-b^2)(x^2-y^2)$

(3) $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}=1+\dfrac{1-ab}{(a+1)(b+1)}$

(4) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}=0$

★
【3】　次の等式が成り立つことを証明しなさい.

(1) $a+b+c=0$ のとき, $\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{2b}{c+a}$

(2) $a+b+c=0$ のとき, $\dfrac{ab}{a^2+b^2-c^2}+\dfrac{bc}{b^2+c^2-a^2}=\dfrac{2ca}{c^2+a^2-b^2}$

(3) $abc=1$ のとき, $\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}=1$

(4) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ のとき, $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^3=\dfrac{1}{a^3+b^3+c^3}$

★
【4】　次の等式が成り立つことを証明しなさい.

(1) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき, $\dfrac{a^2-b^2}{ab}=\dfrac{c^2-d^2}{cd}$

(2) $a:b=c:d$ のとき, $\left(\dfrac{a-c}{b-d}\right)^2=\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$

(3) $a:b:c=x:y:z$ のとき, $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{ab+bc+ca}{xy+yz+zx}$

■自習

★
【5】　次の条件と同値となる数式を 1 つ答えなさい．ただし，a, b, c はすべて実数とします．

(1) $a=1$ または $b=1$ または $c=1$

(2) $a=1$ かつ $b=1$ かつ $c=1$

(3) a, b, c のうち，少なくとも 2 つは等しい．

★★★
【6】　次の問いに答えなさい．

(1) $\dfrac{ax+by}{a+b}=\dfrac{x+y}{2}$ のとき，$a=b$ または $x=y$ になることを証明しなさい．

(2) $x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x)=0$ のとき，$x=y$, $y=z$, $z=x$ のうち少なくとも 1 つが成り立つことを証明しなさい．

(3) 3 つの数 a, b, c のうち，少なくとも 2 つは 0 でないとする．等式
$ab(a+b)=bc(b+c)=ca(c+a)$
が成り立つとき，$a+b+c=0$ または $a=b=c$ となることを証明しなさい．

(4) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ のとき，$a+b$, $b+c$, $c+a$ のうち少なくとも 1 つは 0 であることを証明しなさい．

★★
【7】　次の問いに答えなさい．

(1) $a+b-2c=c^2-ab=0$ のとき，$a=b=c$ が成り立つことを証明しなさい．

(2) $a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=12$ のとき，$a=b=c=2$ が成り立つことを証明しなさい．

(3) $a+b+c=9$, $ab+bc+ca=27$ のとき，$a=b=c=3$ が成り立つことを証明しなさい．

体験授業をご受講いただく皆さんへ

体験授業をお申し込みいただきありがとうございます。
Ｚ会の教室の授業は、学力を効果的に上げていくためのカリキュラム・内容となっております。
次回以降もぜひ継続して受講することをおすすめします。

《体験授業後の流れ》

お申し込み方法

引き続き継続して受講される場合は、各教室窓口・お電話でお申し込みが可能です。
※体験授業終了直後に窓口で申し込んでお帰りになることもできます。
※認定が必要な講座をご希望の方はテストを受験していただく場合があります。
※予習が必要な講座は次回までの予習がありますので、余裕を持ってお申し込みください。
※本科授業は、「**クラス授業**」「**映像授業**」が選べます。
※映像授業の体験も承ります。一部の講座では映像授業のご用意がありません。予めご了承ください。

通話料無料 **0120-2828-76** 月曜日～土曜日 12:00～20:00（休室日を除く）

各教室電話番号
月曜日～土曜日 14:00～21:00（休室日を除く）

御茶ノ水教室	03-5296-2828	池袋教室	03-5985-2828
渋谷教室	03-5774-2828	横浜教室	045-313-2828
新宿教室	03-5304-2828	葛西教室	03-5878-0844

お申し込み後の流れ

お申し込みから1週間以内に手続書類（入会書類、お支払いについて、会員証など）をお送りします。

※受講料のお支払い期日が次回授業よりも後の場合でも、次回授業へのご参加は可能です。
※体験授業後にご受講いただく場合、「Z会の教室」では「月度」単位で受講料を請求させていただいているため、体験授業分も受講料をご請求する場合があります。くわしくは教室スタッフまでお問い合わせください。

→ お申し込み後、テキストを各教室窓口にてお受け取りください。

※葛西教室にて高1・高2講座・受験講座、
Z会進学教室大学受験部立川教室にて高1・高2・受験生講座を開講しております。

講座選択に迷ったら…

学習相談は随時承っています。お電話でのご相談も可能です。
受講に際して不明点、不安な点がある方は、各教室の窓口、または上記番号までお気軽にお問い合わせください。

Ｚ会の教室の受講サポート　—万全のシステムで効果的な学習をサポートします—

1. 講師への質問

授業前後の時間や休み時間を利用して、担当講師に直接質問をすることができます。
疑問点をそのままにすることなく、その場で解消することができます。

2. 振替受講

本科のクラス授業で欠席する回の授業を、同一週・同一講座の他のクラスで振替受講することができます。
他教室への振替、映像授業（教室・自宅での受講）への振替も可能です。前日までに各教室窓口、お電話にてお申し出下さい。

※振替手続は一週前の月曜から可能です。

3. 進路・学習・入試相談

各教室の学習アドバイザーが皆さんのご相談を随時承っています。

4. 自習室

本科生の方は休室日を除いて、全教室の自習室をいつでもご利用いただけます。