2024 年度　本試験　数学Ⅰ・数学 A　解答・解説

第 1 問

〔1〕

$$n < 2\sqrt{13} < n+1 \quad \cdots\cdots ①$$

$2\sqrt{13} = \sqrt{52}$ であるから

$$7 < 2\sqrt{13} < 8$$

◀ $\sqrt{49} < \sqrt{52} < \sqrt{64}$

よって，①を満たす整数 n は **7** である。実数 a，b を

$$a = 2\sqrt{13} - 7 \quad \cdots\cdots ②$$

$$b = \frac{1}{a} \quad \cdots\cdots ③$$

で定めると

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{2\sqrt{13}-7} = \frac{2\sqrt{13}+7}{(2\sqrt{13}-7)(2\sqrt{13}+7)} = \frac{\boldsymbol{7+2\sqrt{13}}}{\boldsymbol{3}} \quad \cdots\cdots ④$$

である。また

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a^2 - 9b^2} &= (a+3b)(a-3b)\\ &= \{(2\sqrt{13}-7)+(2\sqrt{13}+7)\}\{(2\sqrt{13}-7)-(2\sqrt{13}+7)\}\\ &= 4\sqrt{13}\cdot(-14)\\ &= \boldsymbol{-56\sqrt{13}}\end{aligned}$$

◀ a^2-9b^2 に a，b の値をそのまま代入してもよいが，$3b = 7+2\sqrt{13}$ に着目し，$(a+3b)(a-3b)$ と因数分解してから代入した。

$7 < 2\sqrt{13} < 8$ より

$$14 < 7 + 2\sqrt{13} < 15$$

$$\frac{14}{3} < \frac{7+2\sqrt{13}}{3} < \frac{15}{3}$$

④より，$b = \dfrac{7+2\sqrt{13}}{3}$ であるから，$\dfrac{m}{3} < b < \dfrac{m+1}{3}$ を満たす整数 m は **14** である。よって，③より $\dfrac{3}{15} < a < \dfrac{3}{14}$ であるから，これに②を代入して

$$\frac{1}{5} < 2\sqrt{13} - 7 < \frac{3}{14}$$

$$\frac{36}{5} < 2\sqrt{13} < \frac{101}{14}$$

$$\frac{18}{5} < \sqrt{13} < \frac{101}{28}$$

$\dfrac{18}{5} = 3.6$，$\dfrac{101}{28} = 3.607\cdots$ より，$\sqrt{13}$ の整数部分は **3** であり，小数第 1 位の数字は **6**，小数第 2 位の数字は **0** であることがわかる。

◀ $3.600 < \sqrt{13} < 3.607\cdots$ より，$\sqrt{13} = 3.60\cdots$ である。

〔2〕

坂の傾斜が 7 %のとき，100m の水平距離に対して 7m の割合で高くなるから

$$\tan\angle\mathrm{DCP} = \frac{7}{100} = 0.07$$

三角比の表より，$\tan 4^\circ = 0.0699$，$\tan 5^\circ = 0.0875$ であるから

$$\tan 4^\circ < \tan\angle\mathrm{DCP} < \tan 5^\circ$$

$$4^\circ < \angle\mathrm{DCP} < 5^\circ$$

◀ θ_1，θ_2 が鋭角で $\tan\theta_1 < \tan\theta_2$ のとき $\theta_1 < \theta_2$

よって，$n^\circ < \angle\mathrm{DCP} < n^\circ + 1^\circ$ を満たす 1 以上 9 以下の整数 n の値は，**4** である。

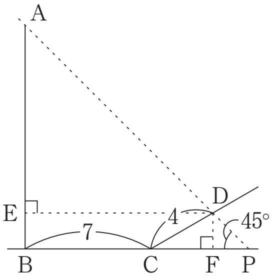
以下，$\angle\mathrm{DCP} = 4^\circ$ とする。点 D から直線 BP に垂直な直線を引き，直線 BP との交点を F とする。

BC $= 7$，CD $= 4$，$\angle\mathrm{APB} = 45^\circ$ のとき，直角三角形 DCF において，三角比の定義より

$$\sin\angle\mathrm{DCF} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{BE}}{4}$$

◀四角形 BFDE は長方形であるから BE $=$ DF

よって



$\mathbf{BE = 4 \times \sin\angle DCP}$ ⇨ ⓪

同様に，直角三角形 DCF において，三角比の定義より

$$\cos\angle DCF = \frac{CF}{CD} = \frac{CF}{4}$$

よって

$$CF = 4 \times \cos\angle DCP$$

となるから

$$\mathbf{DE} = BC + CF = \mathbf{(7 + 4 \times \cos\angle DCP)}\ \mathrm{m}$$ ⇨ ②

また，$\angle ADE = 45°$，$\angle AED = 90°$ であるから，$\triangle ADE$ は $AE = DE$ の直角二等辺三角形である。したがって

$$\begin{aligned} AB &= AE + EB = DE + BE \\ &= 7 + 4\cos\angle DCP + 4\sin\angle DCP \\ &= 7 + 4\cos 4° + 4\sin 4° \\ &= 7 + 4(\cos 4° + \sin 4°) \end{aligned}$$

三角比の表より，$\sin 4° = 0.0698$，$\cos 4° = 0.9976$ であるから

$$AB = 7 + 4(0.9976 + 0.0698) = 11.2696$$

よって，電柱の高さは，小数第 2 位で四捨五入すると **11.3** m である。 ⇨ ③

次に，$\angle APB = 42°$ のとき，直角三角形 CDF において，三角比の定義より

$$\sin\angle DCF = \frac{DF}{CD}$$

$$DF = CD\sin\angle DCP \quad \cdots\cdots ⑤$$

また

$$\cos\angle DCF = \frac{CF}{CD}$$

$$CF = CD\cos\angle DCP \quad \cdots\cdots ⑥$$

$\angle ADE = 42°$ であるから，直角三角形 AED において，三角比の定義より

$$\frac{AE}{DE} = \tan\angle ADE = \tan 42°$$

よって

$$AE = DE\tan 42°$$

ここで，②より

$$DE = BC + CF = 7 + CD\cos\angle DCP$$

であるから

$$\begin{aligned} AE &= (7 + CD\cos\angle DCP) \times \tan 42° \\ &= 7 \times \tan 42° + CD \times \cos\angle DCP \times \tan 42° \quad \cdots\cdots ⑦ \end{aligned}$$

また，$BE = DF$ で，①より

$$BE = DF = CD \times \sin\angle DCP \quad \cdots\cdots ⑧$$

したがって，③，④より

$$\begin{aligned} AB &= AE + BE \\ &= 7 \times \tan 42° + CD \times \cos\angle DCP \times \tan 42° + CD \times \sin\angle DCP \\ &= 7 \times \tan 42° + CD \times (\cos\angle DCP \times \tan 42° + \sin\angle DCP) \end{aligned}$$

よって

$$CD \times (\cos\angle DCP \times \tan 42° + \sin\angle DCP) = AB - 7 \times \tan 42°$$

$$\mathbf{CD = \frac{AB - 7 \times \tan 42°}{\sin\angle DCP + \cos\angle DCP \times \tan 42°}}\ \mathrm{m}$$ ⇨ ⑤，⓪，①

◀ $\angle DCF = \angle DCP$

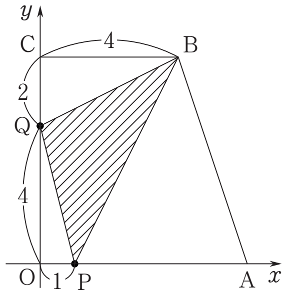
◀四角形 BFDE は長方形であるから
$DE = BF$

◀$\angle APB$ の大きさが変化しても，この関係は変わらない。

第２問

〔1〕

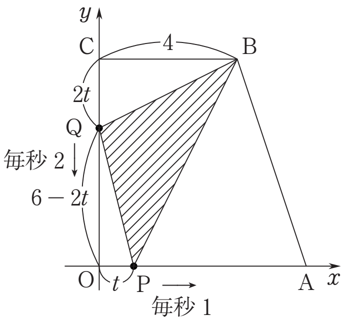
(1)　開始時刻から 1 秒後の点 P，Q の位置は，次の図のようになる。



よって

$$\triangle\mathbf{PBQ} = (\text{四角形 OPBC}) - \triangle\text{OPQ} - \triangle\text{BCQ}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 6\cdot(1+4) - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2$$
$$= 15 - 2 - 4 = 9$$

(2)　$0 \leqq t \leqq 3$ のとき，開始時刻から t 秒後の点 P，Q の位置は，次の図のようになる。

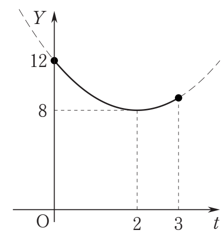


よって，(1)と同様に

$$\triangle\text{PBQ} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot(t+4) - \frac{1}{2}\cdot t\cdot(6-2t) - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2t$$
$$= 3t + 12 - 3t + t^2 - 4t$$
$$= t^2 - 4t + 12 = (t-2)^2 + 8$$

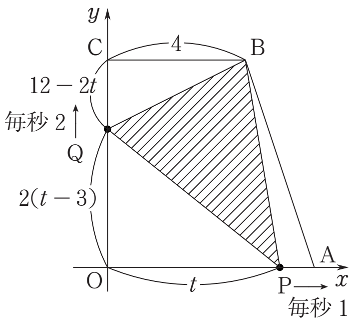
したがって，△PBQ の面積は，$t = 2$ で最小値 **8** をとり，$t = 0$ で最大値 **12** をとる。

◀$Y = (t-2)^2 + 8$ の $0 \leqq t \leqq 3$ におけるグラフは次のようになる。



◀終了時刻は $t = 6$ のときであり，(2)で $0 \leqq t \leqq 3$ のときを考えているので，残りの時刻での △PBQ の面積を調べる。

(3)　$3 < t \leqq 6$ のとき，開始時刻から t 秒後の点 P，Q の位置は，次の図のようになる。



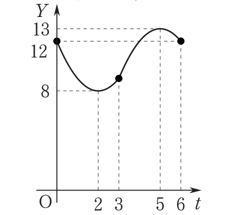
◀
$$\text{CQ} = \text{CO} - \text{QO}$$
$$= 6 - 2(t-3)$$
$$= 12 - 2t$$

よって，(1)，(2)と同様に

$$\triangle \mathrm{PBQ} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot(t+4) - \frac{1}{2}\cdot t\cdot 2(t-3) - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot(12-2t)$$
$$= 3t + 12 - t^2 + 3t - 24 + 4t$$
$$= -t^2 + 10t - 12 = -(t-5)^2 + 13$$

(2)の結果と合わせると，開始時刻から終了時刻までの △PBQ の面積は，$t=2$ で最小値 **8** をとり，$t=5$ で，最大値 **13** をとる。

◀△PBQ の面積を Y とすると
$$Y = \begin{cases} t^2-4t+12 & (0 \leqq t \leqq 3) \\ -t^2+10t-12 & (3 < t \leqq 6) \end{cases}$$
であり，$0 \leqq t \leqq 6$ におけるグラフは次のようになる。



(4)　△PBQ の面積が 10 以下となるときを考える。

(i)　$0 \leqq t \leqq 3$ のとき

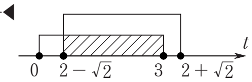
$(t-2)^2 + 8 \leqq 10$

$(t-2)^2 \leqq 2$

$2-\sqrt{2} \leqq t \leqq 2+\sqrt{2}$

$0 \leqq t \leqq 3$ との共通部分を考えて

$2-\sqrt{2} \leqq t \leqq 3$



(ii)　$3 < t \leqq 6$ のとき

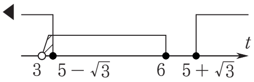
$-(t-5)^2 + 13 \leqq 10$

$(t-5)^2 \geqq 3$

$t \leqq 5-\sqrt{3}$，$5+\sqrt{3} \leqq t$

$3 < t \leqq 6$ との共通部分を考えて

$3 < t \leqq 5-\sqrt{3}$



(i)，(ii)より，△PBQ の面積が 10 以下となるのは

$2-\sqrt{2} \leqq t \leqq 5-\sqrt{3}$

のときであるから，その時間は

$(5-\sqrt{3}) - (2-\sqrt{2}) = \mathbf{3} - \sqrt{\mathbf{3}} + \sqrt{\mathbf{2}}$ (秒間)

〔2〕

(1)(i)　ヒストグラムにおける最頻値は，度数が最も大きい階級の階級値であるから，図 1 から A の最頻値は階級 **510 以上 540 未満**の階級値である。⇨ ⑧

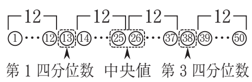
さらに，B のヒストグラムから度数分布表を作成すると，次のようになる。

階級 (以上〜未満)	270〜300	300〜330	330〜360	360〜390	390〜420	420〜450	450〜480	480〜510	510〜540
度数	1	1	0	2	5	10	16	14	1
累積度数	1	2	2	4	9	19	35	49	50

小さい方から 25 番目と 26 番目の値は，どちらも 450 以上 480 未満の階級に含まれるため，B の中央値が含まれる階級は **450 以上 480 未満**である。

⇨ ⑥

◀データの大きさが 50 であるから，中央値は小さい方から 25 番目と 26 番目の値の平均値である。



(ii)　A，B それぞれのデータの値を小さい順に並べたとき，速い方から 13 番目のデータは第 1 四分位数である。図 3 の箱ひげ図より

A の速い方から 13 番目のベストタイム：約 480 秒

B の速い方から 13 番目のベストタイム：約 435 秒

よって，およそ **45** 秒速い。　⇨ ④

A の第 1 四分位数は約 480 秒，第 3 四分位数は約 535 秒であるから，四分位範囲はおよそ

$535 - 480 = 55$ (秒)

B の第 1 四分位数は約 435 秒，第 3 四分位数は約 490 秒であるから，四分位範囲はおよそ

$490-435=55$（秒）

よって，その差の絶対値は約 0 であるから，**0 以上 20 未満**である。⇨ ⓪

(iii)　B の 1 位の選手について，**式**と表 1 より

$296=454+45z$

$z=-\dfrac{158}{45}=-3.5111\cdots$

となるから，B の 1 位の選手のベストタイムに対する z の値は，およそ $\boldsymbol{z=-3.51}$ である。同様に，A の 1 位の選手について，**式**と表 1 より

$376=504+40z$

$z=-3.2$

となるから，A の 1 位の選手のベストタイムに対する z の値は，$z=-3.2$ である。したがって，**ベストタイムで比較すると B の 1 位の選手の方が速く，z の値で比較すると B の 1 位の選手の方が優れている。** ⇨ ①

(2)　図 4 より，マラソンのベストタイムの速い方から 3 番目までの選手の 10000m のベストタイムは，3 選手とも 1670 秒未満である。よって，(a)は**正しい**。

図 4 と図 5 より，マラソンと 10000m の間の相関は，5000m と 10000m の間の相関より弱い。よって，(b)は**誤り**である。 ⇨ ①

第３問

(1)(i)　箱の中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$ のカードが１枚ずつ入っているとき，２回の試行における取り出し方は全部で $2^2=4$ 通りあり，２回の試行で A，B がそろう取り出し方は，$\boxed{\text{A}}-\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{B}}-\boxed{\text{A}}$ の２通りである。

◀１回目の試行で $\boxed{\text{A}}$，２回目の試行で $\boxed{\text{B}}$ を取り出す事象を $\boxed{\text{A}}-\boxed{\text{B}}$ と表した。

よって，求める確率は

$$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

(ii)　３回の試行のうち，$\boxed{\text{A}}$ を１回，$\boxed{\text{B}}$ を２回取り出す取り出し方は，表より３通りである。同様に，$\boxed{\text{A}}$ を２回，$\boxed{\text{B}}$ を１回取り出す取り出し方も３通りであるから，３回の試行で A，B がそろっている取り出し方は

◀表の $\boxed{\text{A}}$ と $\boxed{\text{B}}$ を入れ換えて考えればよい。

$$3+3=6\ (通り)$$

よって，３回の試行で A，B がそろっている確率は $\dfrac{6}{2^3}$ である。

(iii)　４回の試行で A，B がそろっているのは

「$\boxed{\text{A}}$ を１回，$\boxed{\text{B}}$ を３回」または「$\boxed{\text{A}}$ を２回，$\boxed{\text{B}}$ を２回」
または「$\boxed{\text{A}}$ を３回，$\boxed{\text{B}}$ を１回」

取り出す取り出し方の総数である。これらは，それぞれ４枚のカードを１列に並べる並べ方であるから

$$\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{3!}=4+6+4=14\ (通り)$$

◀p 個ある同じものと，q 個ある別の同じものを１列に並べる順列の総数は $\dfrac{(p+q)!}{p!q!}$

よって，４回の試行で A，B がそろっている確率は

$$\frac{14}{2^4}=\frac{7}{8}$$

別解

４回の試行で A，B がそろっているのは

「４回とも $\boxed{\text{A}}$ を取り出す場合」または「４回とも $\boxed{\text{B}}$ を取り出す場合」

の余事象であると考えてもよい。

これらの取り出し方は，それぞれ１通りであり，４回の試行における取り出し方が全部で 16 通りあることから

◀ $2^4=16$(通り)

$$16-2=14\ (通り)$$

(2)(i)　箱の中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ のカードが１枚ずつ入っているとき，３回目の試行で初めて A，B，C がそろう取り出し方は，３枚のカードを１列に並べる並べ方であるから

$$3!=6\ (通り)$$

よって，３回目の試行で初めて A，B，C がそろう確率は $\dfrac{6}{3^3}$ である。

(ii)　４回目の試行で初めて A，B，C がそろうのは，３回目の試行までに $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ のうち２種類を取り出した後，４回目に残りの１種類を初めて取り出すときである。

A，B，C のうち，２種類を選ぶときの選び方は３通りあり，(1)(ii)より，３回目の試行までにその２種類がそろっている取り出し方は６通りある。

よって，４回目の試行で初めて A，B，C がそろう取り出し方は

$$3\times6=18\ (通り)$$

◀４回目の試行は残りの１種類を取り出せばよいから，その取り出し方は１通りのみである。

ある。したがって，４回目の試行で初めて A，B，C がそろう確率は

$$\frac{18}{3^4}=\frac{2}{9}$$

(iii)　５回目の試行で初めて A，B，C をそろえるには，４回目の試行までに $\boxed{\text{A}}$，

$\boxed{B}$，$\boxed{C}$ のうち 2 種類を取り出した後，5 回目に残りの 1 種類を初めて取り出せばよい。

(1)(iii)より，4 回目の試行までに 2 種類がそろっている取り出し方は 14 通りあるから

$$3\times 14=\mathbf{42}\ (\text{通り})$$

あり，5 回目の試行で初めて A，B，C がそろう確率は $\dfrac{42}{3^5}$ である。

◀A，B，C のうち，2 種類を選ぶときの選び方が 3 通りあることや，最後の試行で残りの 1 種類を取り出せばよいことは，(2)(ii)と同様である。

(3)　箱の中に $\boxed{A}$，$\boxed{B}$，$\boxed{C}$，$\boxed{D}$ のカードが 1 枚ずつ入っている場合を考える。

3 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろう取り出し方は，(2)(i)より，6 通りある。その後，6 回目の試行で初めて $\boxed{D}$ を取り出すのは，4 回目と 5 回目の試行でも $\boxed{A}$，$\boxed{B}$，$\boxed{C}$ のいずれかを取り出すときである。

よって，「6 回の試行のうち 3 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて $\boxed{D}$ が取り出される」取り出し方は

$$6\times 3\times 3=\mathbf{54}\ (\text{通り})\quad\cdots\cdots\text{①}$$

あることがわかる。

同様に，4 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろう取り出し方は，(2)(ii)より，18 通りある。その後，6 回目の試行で初めて $\boxed{D}$ を取り出すのは，5 回目の試行でも $\boxed{A}$，$\boxed{B}$，$\boxed{C}$ のいずれかのカードを取り出すときである。

よって，「6 回の試行のうち 4 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて $\boxed{D}$ が取り出される」取り出し方は

$$18\times 3=\mathbf{54}\ (\text{通り})\quad\cdots\cdots\text{②}$$

あることもわかる。

同様に，5 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろう取り出し方は，(2)(iii)より，42 通りある。

よって，「6 回の試行のうち 5 回目の試行で初めて A, B, C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて $\boxed{D}$ が取り出される」取り出し方は 42 通りある。 …③

①～③より，「6 回目の試行で初めて $\boxed{D}$ が取り出されて，A，B，C，D がそろう」取り出し方は

$$54+54+42=150\ (\text{通り})$$

ある。6 回目の試行で初めて取り出されるカードが $\boxed{A}$，$\boxed{B}$，$\boxed{C}$ の場合も同様であるから，6 回目の試行で初めて A，B，C，D がそろう取り出し方は

$$150\times 4=600\ (\text{通り})$$

ある。よって，6 回目の試行で初めて A，B，C，D がそろう確率は

$$\frac{600}{4^6}=\mathbf{\frac{75}{512}}$$

第 4 問

(1)　40 を 6 進数で表すと

$$40=1\times 6^2+0\times 6+4=104_{(6)}$$

であるから，T6 はスタートしてから 40 秒後に **104** と表示される。

6)	40	(余り)
6)	6	… 4
	1	… 0

$10011_{(2)}$ を 10 進数で表すと

$$10011_{(2)}=1\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2+1=19$$

◀「別解」参照。

19 を 4 進数で表すと

$$19=1\times 4^2+0\times 4+3=103_{(4)}$$

より，T4 はスタートしてから $10011_{(2)}$ 秒後に **103** と表

4)	19	(余り)
4)	4	… 3
	1	… 0

示される。

別解

$$
\begin{aligned}
10011_{(2)} &= 1\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2+1\\
&= 1\times4^2+(0\times2+0)\times4+(1\times2+1)\\
&= 1\times4^2+0\times4+3\\
&= 103_{(4)}
\end{aligned}
$$

(2)　T4 で表示できる最大の数は 333 であり，その 1 秒後である $1000_{(4)}$ 秒後に表示が 000 に戻る。$1000_{(4)}$ を 10 進数で表すと

$$1000_{(4)}=1\times4^3+0\times4^2+0\times4+0=64$$

であるから，T4 をスタートさせた後，初めて表示が 000 に戻るのは **64** 秒後であり，その後も 64 秒ごとに表示が 000 に戻る。

◀T4 に表示される数は 4 進数であることに注意する。

同様に，T6 で表示できる最大の数は 555 であり，その 1 秒後である $1000_{(6)}$ 秒後に表示が 000 に戻る。$1000_{(6)}$ を 10 進数で表すと

$$1000_{(6)}=1\times6^3+0\times6^2+0\times6+0=216$$

であるから，T6 をスタートさせた後，初めて表示が 000 に戻るのは 216 秒後であり，その後も 216 秒ごとに表示が 000 に戻る。

◀T6 に表示される数は 6 進数であることに注意する。

したがって， T4 と T6 を同時にスタートさせた後，初めて両方の表示が同時に 000 に戻るのは

$$64=2^6$$
$$216=2^3\times3^3$$

より

$$2^6\times3^3=\mathbf{1728}\ (\text{秒後})$$

◀64 と 216 の最小公倍数。

(3)　T4 をスタートさせた後，初めて表示が 012 となるのは

$$12_{(4)}=1\times4+2=6\ (\text{秒後})$$

である。その後，(2)より，64 秒ごとに 012 と表示される。よって，0 以上の整数 ℓ に対して，T4 をスタートさせた ℓ 秒後に T4 が 012 と表示されることと

ℓ を **64** で割った余りが **6** であること

は同値であるから，x を 0 以上の整数として

$$\ell=64x+6$$

と表すことができる。

さらに，T3 をスタートさせた後，初めて表示が 012 となるのは

$$12_{(3)}=1\times3+2=5\ (\text{秒後})$$

である。$1000_{(3)}=27$ より，T4 と同様に考えると，T3 が 012 と表示されるのは，y を 0 以上の整数として $27y+5$ (秒後) であることがわかる。

◀T3 は 27 秒ごとに表示が 000 に戻るから，27 で割った余りが 5 である時間を考えればよい。

したがって，T3 と T4 を同時にスタートさせてから，同時に 012 と表示されるのは

$$64x+6=27y+5$$

のときである。このとき

$$64x-27y=-1 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

であり，64 と 27 についてユークリッドの互除法を用いると

$$
\begin{aligned}
64&=27\times2+10\\
27&=10\times2+7\\
10&=7\times1+3\\
7&=3\times2+1
\end{aligned}
$$

であるから

$$1 = 7 - 3 \times 2$$
$$= 7 - (10 - 7 \times 1) \times 2 = 7 \times 3 - 10 \times 2$$
$$= (27 - 10 \times 2) \times 3 - 10 \times 2 = 27 \times 3 - 10 \times 8$$
$$= 27 \times 3 - (64 - 27 \times 2) \times 8 = -64 \times 8 + 27 \times 19$$

すなわち

$$64 \times 8 - 27 \times 19 = -1 \quad \cdots\cdots ②$$

となる。よって，① − ② より

$$64(x-8) - 27(y-19) = 0$$
$$64(x-8) = 27(y-19)$$

64 と 27 は互いに素であるから，$x-8$ は 27 の倍数であり，整数 k を用いて

$$x - 8 = 27k$$
$$x = 27k + 8$$

と表すことができる。このとき

$$64x + 6 = 64(27k+8) + 6 = 64 \times 27k + 518$$

である。T3 と T4 を同時にスタートさせてから，初めて同時に 012 と表示されるまでの時間が m 秒であるから，m は

$$m = 64 \times 27k + 518$$

を満たす 0 以上の最小の整数である。よって，$k=0$ のとき

$$m = \mathbf{518}$$

◀$64x+6$ が 0 以上の最小の整数となるような k の値を考える。

T6 が 012 と表示されるのは，z を 0 以上の整数として $216z+8$（秒後）であるから，T4 と T6 を同時にスタートさせてから，同時に 012 と表示されるのは

$$64x + 6 = 216z + 8$$

のときである。このとき

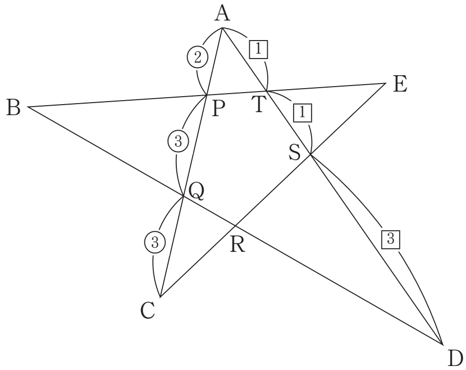
◀T6 をスタートさせた後，初めて表示が 012 となるのは
$12_{(6)} = 1 \times 6 + 2$
$= 8$（秒後）
であり，(2)の考察より，T6 は 216 秒ごとに表示が 000 に戻るから，216 で割った余りが 8 である時間を考えればよい。

$$64x - 216z = 2$$
$$32x - 108z = 1$$
$$2(16x - 54z) = 1 \quad \cdots\cdots ③$$

であり，③を満たす整数 x，z は存在しない。したがって，**T4 と T6 を同時にスタートさせてから，両方が同時に 012 と表示されることはない。** ⇨ ③

◀x，z が整数のとき，$16x-54z$ も整数であるから，③の左辺は偶数，右辺は奇数となる。

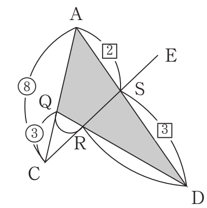
第５問



(1)　△AQD と直線 CE において，メネラウスの定理より

$$\mathbf{\frac{QR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}\cdot\frac{AC}{CQ}=1}$$ ➪ ⓪

◀



が成り立つ。DS : SA ＝ 3 : 2，AC : CQ ＝ 8 : 3 であるから

$$\frac{QR}{RD}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{3}=1$$

$$\frac{QR}{RD}=\frac{1}{4}$$

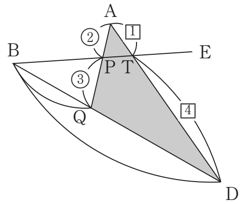
よって

$$\mathbf{QR : RD = 1 : 4}$$

また，△AQD と直線 BE において，メネラウスの定理より

$$\frac{QB}{BD}\cdot\frac{DT}{TA}\cdot\frac{AP}{PQ}=1$$

◀



が成り立つ。DT : TA ＝ 4 : 1，AP : PQ ＝ 2 : 3 であるから

$$\frac{QB}{BD}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{2}{3}=1$$

$$\frac{QB}{BD}=\frac{3}{8}$$

よって

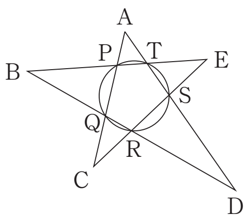
$$\mathbf{QB : BD = 3 : 8}$$

したがって

$$BQ : QR : RD = 3 : 1 : 4$$

となることがわかる。

(2)(i)　AP : PQ : QC ＝ 2 : 3 : 3 より AP ＝ 2，AQ ＝ 5 であり，AT : TS ＝ 1 : 1 より AS ＝ 2AT である。 よって，方べきの定理より



$$AT\cdot AS = AP\cdot AQ$$

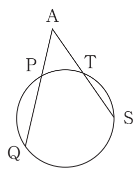
$$AT\cdot 2AT = 2\cdot 5$$

$$AT^2 = 5$$

AT ＞ 0 より

$$\mathbf{AT = \sqrt{5}}$$

◀5 点 A，T，S，P，Q に着目した。



さらに，DR : RQ ＝ 4 : 1 より，DR ＝ 4RQ，DQ ＝ 5RQ である。よって，方べきの定理より

$$DR\cdot DQ = DS\cdot DT$$

$$4RQ\cdot 5RQ = 3\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5}$$

$$RQ^2 = 3$$

RQ ＞ 0 より RQ ＝ $\sqrt{3}$ であるから，DR ＝ $4\sqrt{3}$ である。

◀5 点 D，R，Q，S，T に着目した。

◀AT ＝ $\sqrt{5}$，AT : TS : SD ＝ 1 : 1 : 3 より

DS ＝ 3AT ＝ $3\sqrt{5}$

DT ＝ 4AT ＝ $4\sqrt{5}$

(ii)　BQ : QR : RD ＝ 3 : 1 : 4 で，$DR = 4\sqrt{3}$ より $BQ = 3\sqrt{3}$，$DQ = 5\sqrt{3}$ である。よって，$AQ \cdot CQ = 5 \cdot 3 = 15$ かつ $\mathbf{BQ \cdot DQ} = 3\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = \mathbf{45}$ であるから

◀ AC ＝ 8，AQ ＝ 5 より CQ ＝ 3

$$\mathbf{AQ \cdot CQ < BQ \cdot DQ} \quad \cdots\cdots ①$$
➪ 0

が成り立つ。また，3 点 A，B，C を通る円と直線 BD との交点のうち，B と異なる点を X とすると，方べきの定理より

◀ 5 点 Q，A，C，B，X に着目した。

$$\mathbf{AQ \cdot CQ = BQ \cdot XQ} \quad \cdots\cdots ②$$
➪ 1

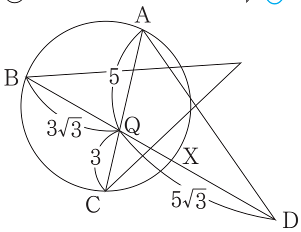
①，②より

$$BQ \cdot XQ < BQ \cdot DQ$$

$BQ > 0$ より

$$\mathbf{XQ < DQ}$$
➪ 0

であるから，点 D は 3 点 A，B，C を通る円の**外部**にある。　➪ 2



(iii)　CR ＝ RS ＝ SE ＝ 3 のとき，3 点 C，D，E を通る円と直線 AD との交点のうち，D と異なる点を Y とすると，方べきの定理より

◀ (ii)と同様に考えて，YS と AS を比較する。

$$YS \cdot DS = CS \cdot ES = 6 \cdot 3 = 18$$

また

$$AS \cdot DS = 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 30$$

◀ AS ＝ 2AT

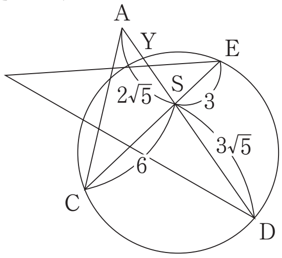
であるから

$$YS \cdot DS < AS \cdot DS$$

$DS > 0$ より

$$YS < AS$$

であるから，点 A は 3 点 C，D，E を通る円の**外部**にある。　➪ 2



3 点 C，D，E を通る円と直線 BD との交点のうち，D と異なる点を Z とすると，方べきの定理より

◀ (ii)と同様に考えて，ZR と BR を比較する。

$$ZR \cdot DR = CR \cdot ER = 3 \cdot 6 = 18$$

また

$$BR \cdot DR = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 48$$

◀ BQ : QR : RD ＝ 3 : 1 : 4 より BR : DR ＝ 1 : 1

であるから

$$ZR \cdot DR < BR \cdot DR$$

$DR > 0$ より

$$ZR < BR$$

であるから，点 B は 3 点 C，D，E を通る円の**外部**にある。　➪ 2