

第1問

[1]

(1)(i)  $y = \log_3 x$  のグラフについて、 $x = 27$  のとき

$$y = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$$

より、 $y = \log_3 x$  のグラフは点 **(27, 3)** を通る。

また、 $y = \log_2 \frac{x}{5}$  のグラフについて、 $y = 1$  のとき

$$1 = \log_2 \frac{x}{5}$$

$$2 = \frac{x}{5}$$

より

$$x = 10$$

であるから、 $y = \log_2 \frac{x}{5}$  のグラフは点 **(10, 1)** を通る。

(ii)  $k > 0$  のとき、 $k$  の値によらず  $k^0 = 1$  であるから

$$0 = \log_k 1$$

よって、 $y = \log_k x$  のグラフは、 $k$  の値によらず定点 **(1, 0)** を通る。

(iii)  $y = \log_k x$  のグラフについて、(ii)より、 $k$  の値によらず点 **(1, 0)** を通る。

また、 $x > 0$ 、 $x \neq 1$  のとき

$$\log_k x = \frac{1}{\log_x k}$$

より、1より大きい同じ  $x$  の値における  $y$  の値を比較すると、 $k = 2, 3, 4$  のとき、 $k$  の値が大きくなるにつれて  $y$  の値は小さくなる。よって、グラフの概形は **④** である。  $\Rightarrow$  **④**

次に

$$y = \log_2 kx = \log_2 x + \log_2 k$$

より、 $y = \log_2 kx$  のグラフは、 $y = \log_2 x$  のグラフを  $y$  軸の正の方向に  $\log_2 k$  だけ平行移動したものである。

$\log_2 2$ 、 $\log_2 3$ 、 $\log_2 4$  はすべて異なる値であるから、 $k = 2, 3, 4$  のときの  $y = \log_2 kx$  のグラフは、どの二つも共有点をもたない。また

$$\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 \text{ すなわち } \log_2 2x < \log_2 3x < \log_2 4x$$

より、グラフの概形は **⑤** である。  $\Rightarrow$  **⑤**

(2)(i)  $x > 0$ 、 $x \neq 1$ 、 $y > 0$  のとき、 $\log_x y = 2$  より

$$y = x^2$$

よって、方程式  $\log_x y = 2$  の表す図形を図示すると、**②** の  $x > 0$ 、 $x \neq 1$ 、 $y > 0$  の部分となる。  $\Rightarrow$  **②**

(ii) (i)と同様に考えると

$$0 < \log_x y < 1 \text{ すなわち } \log_x 1 < \log_x y < \log_x x$$

より

$$x > 1 \text{ のとき } 1 < y < x,$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき } 0 < x < y < 1$$

であるから、不等式  $0 < \log_x y < 1$  の表す領域は

$$x > 1 \text{ のとき、直線 } y = 1 \text{ の上側かつ直線 } y = x \text{ の下側}$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき、直線 } y = 1 \text{ の下側かつ直線 } y = x \text{ の上側}$$

であり、これを図示すると **②** の斜線部分となる。ただし、境界（境界線）

◀  $\log_2 2 = \log_2 \frac{x}{5}$

◀ここで④か①に絞られる。

◀ $a > 0$ 、 $a \neq 1$ 、 $b > 0$ 、 $c > 0$ 、 $c \neq 1$  のとき  
 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

◀ここで④か⑤に絞られる。

◀ $\log_2 x$  は増加関数。

◀ $\log_x x^2 = 2$  より。

◀底  $x$  と 1 の大小関係によって場合を分ける必要があることに注意。

は含まない。

⇒ ②

[2]

(1) 方程式  $S(x) = 0$  の解は、 $x^2 + 4x + 7 = 0$  より

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \cdot 7}$$

ゆえに

$$x = -2 \pm \sqrt{3}i$$

また、 $2x^3 + 7x^2 + 10x + 5$  を

$x^2 + 4x + 7$  で割ると

商  $T(x)$  は  $2x - 1$ 、余り  $U(x)$  は  $12$

$$\begin{array}{r}
 2x - 1 \\
 x^2 + 4x + 7 \overline{) 2x^3 + 7x^2 + 10x + 5} \\
 \underline{2x^3 + 8x^2 + 14x} \phantom{+ 5} \\
 -x^2 - 4x + 5 \\
 \underline{-x^2 - 4x - 7} \\
 12
 \end{array}$$

(2)(i) 題意より、 $P(x) = S(x)T(x) + U(x)$  である。

$P(x)$  を  $S(x)$  で割った余りが定数  $k$  になるとき、 $U(x) = k$  とおける。

このとき

$$P(x) = S(x)T(x) + k$$

であり

$$S(\alpha) = S(\beta) = 0$$

が成り立つことから

$$P(\alpha) = P(\beta) = k$$

となる。すなわち、 $P(x) = S(x)T(x) + k$  かつ  $S(\alpha) = S(\beta) = 0$  が成り立つことから、 $P(\alpha) = P(\beta) = k$  となることが導かれる。 ⇒ ③

したがって、余りが定数  $k$  になるとき

$$P(\alpha) = P(\beta)$$

⇒ ①

が成り立つ。

(ii)  $S(x)$  が 2 次式であるから、 $m, n$  を定数として、 $U(x) = mx + n$  とおける。このとき

$$P(x) = S(x)T(x) + mx + n$$

⇒ ①

と表され、ここに  $x = \alpha, \beta$  をそれぞれ代入すると

$$P(\alpha) = m\alpha + n \text{ かつ } P(\beta) = m\beta + n$$

⇒ ①

となるから、 $P(\alpha) = P(\beta)$  より

$$m\alpha + n = m\beta + n$$

$$m(\alpha - \beta) = 0$$

ここで、 $\alpha \neq \beta$  より  $\alpha - \beta \neq 0$  であるから

$$m = 0$$

⇒ ③

以上より、 $P(\alpha) = P(\beta)$  が成り立つとき、余りは定数になることがわかる。

(i), (ii) の考察より、方程式  $S(x) = 0$  が異なる二つの解  $\alpha, \beta$  をもち、 $P(x)$  を  $S(x)$  で割った余りが定数になるとき、 $P(\alpha) = P(\beta)$  である。

(3)  $S(x) = x^2 - x - 2$  のとき、 $\alpha < \beta$  とすると  $\alpha = -1, \beta = 2$  であり

$$\begin{aligned}
 P(\alpha) &= (-1)^{10} - 2 \cdot (-1)^9 - p \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) \\
 &= 1 + 2 - p + 5 = -p + 8
 \end{aligned}$$

$$P(\beta) = 2^{10} - 2 \cdot 2^9 - p \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 = -4p - 10$$

であり、 $P(\alpha) = P(\beta)$  より

$$-p + 8 = -4p - 10$$

よって

$$p = -6$$

このとき

$$P(\alpha) = P(\beta) = 14$$

◀  $\alpha, \beta$  は方程式  $S(x) = 0$  の異なる二つの解である。

◀  $x = \alpha, \beta$  のとき  $S(x)T(x) = 0$

◀ 2 次式で割った余り  $U(x)$  は、1 次式または定数である。

◀  $S(\alpha) = S(\beta) = 0$

◀ 方程式  $x^2 - x - 2 = 0$  の解は  $x = -1, 2$  である。

◀  $P(x) = x^{10} - 2x^9 - px^2 - 5x$  に  $x = -1$  を代入した。

◀ 同様に  $P(x)$  に  $x = 2$  を代入した。

◀  $-p + 8$  または  $-4p - 10$  に  $p = -6$  を代入した。

より、余りは 14 となる。

## 第2問

(1)(i)  $f(x) = 3(x-1)(x-2)$  のとき

$$f(x) = 3x^2 - 9x + 6$$

より、 $f'(x) = 6x - 9$  であるから、 $f'(x) = 0$  となる  $x$  の値は

$$x = \frac{3}{2}$$

(ii)  $S(x)$  を計算すると

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^x (3t^2 - 9t + 6) dt \\ &= \left[ t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t \right]_0^x \\ &= x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x \end{aligned}$$

であり

$$S'(x) = f(x) = 3(x-1)(x-2)$$

より、 $S(x)$  の増減は右の表のよう

になる。よって、 $S(x)$  は、

$x = 1$  のとき極大値

$$S(1) = 1^3 - \frac{9}{2} \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = \frac{5}{2}$$

をとり、 $x = 2$  のとき極小値

$$S(2) = 2^3 - \frac{9}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 2$$

をとる。

(iii)  $S'(3)$  は  $y = S(x)$  のグラフ上の  $x$  座標が 3 である点における接線の傾きである。よって、 $f(3) = S'(3)$  より、 $f(3)$  は関数  $y = S(x)$  のグラフ上の点  $(3, S(3))$  における接線の傾きと一致する。

(2)  $S_1$  は、 $0 \leq x \leq 1$  の範囲で関数  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸および  $y$  軸で囲まれた図形の面積であるから

$$S_1 = \int_0^1 f(x) dx \quad \Leftrightarrow \textcircled{3}$$

$S_2$  は、 $1 \leq x \leq m$  の範囲で関数  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸で囲まれた図形の面積であるから

$$S_2 = \int_1^m \{-f(x)\} dx \quad \Leftrightarrow \textcircled{5}$$

また、 $m > 1$  と

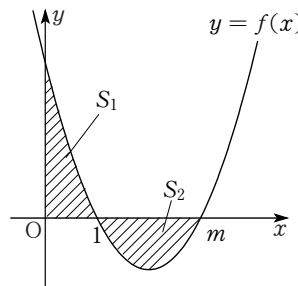
$$\begin{aligned} S'(x) &= f(x) \\ &= 3(x-1)(x-m) \end{aligned}$$

より、 $S(x)$  の増減は右の表のようになる。

$S_1 = S_2$  となるとき

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_1^m \{-f(x)\} dx \\ \int_0^1 f(x) dx &= -\int_1^m f(x) dx \\ \int_0^1 f(x) dx + \int_1^m f(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

$x$		1		2	
$S'(x)$	+	0	-	0	+
$S(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



$x$		1		$m$	
$S'(x)$	+	0	-	0	+
$S(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

◀  $a$  を定数として

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

◀  $S'(x) = f(x)$

◀  $f(x) = 0$  のとき  $x = 1, m$

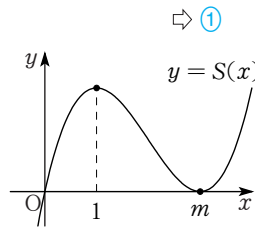
◀ (1)(iii) の考察をふまえる。

$$\int_0^m f(x) dx = 0$$

よって、 $S_1 = S_2$  が成り立つような  $f(x)$  に対して

$$S(m) = \int_0^m f(t) dt = 0$$

であり、 $S(x)$  の増減より、 $S(x) = 0$  となるのは  $x = 0, m$  のときだとわかるので、 $y = S(x)$  のグラフの概形は ① である。



⇨ ①

また、 $S_1 > S_2$  が成り立つような  $f(x)$  に対しては

$$\int_0^1 f(x) dx > \int_1^m \{-f(x)\} dx$$

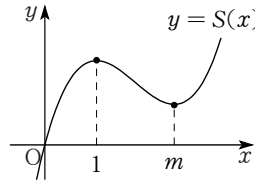
より

$$\int_0^m f(x) dx > 0$$

であるから

$$S(m) > 0$$

$S(x)$  の増減より、 $S(x) = 0$  となるのは  $x = 0$  のときのみだとわかるので、 $y = S(x)$  のグラフの概形は ② である。



⇨ ②

(3) 関数  $y = f(x)$  のグラフは放物線であり、その軸は  $x = \frac{m+1}{2}$  である。

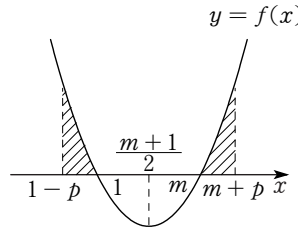
すなわち、関数  $y = f(x)$  のグラフは

直線  $x = \frac{m+1}{2}$  に関して対称である。⇨ ③

よって、右の図より、すべての正の実数  $p$  に対して

$$\int_{1-p}^1 f(x) dx = \int_m^{m+p} f(x) dx \quad \dots\dots\dots ①$$

⇨ ④



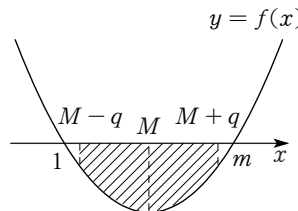
◀  $f(x) = 3(x-1)(x-m)$  より、軸は 2 点  $(1, 0), (m, 0)$  を結ぶ線分の中点を通る。

また、右の図より、 $M = \frac{m+1}{2}$  とおくと、

$0 < q \leq M-1$  であるすべての実数  $q$  に対して

$$\int_{M-q}^M \{-f(x)\} dx = \int_M^{M+q} \{-f(x)\} dx \quad \dots\dots\dots ②$$

⇨ ②



◀  $M-q \geq 1, M+q \leq m$

①より

$$S(1) - S(1-p) = S(m+p) - S(m)$$

$$S(1-p) + S(m+p) = S(1) + S(m) \quad \dots\dots\dots ③$$

⇨ ⑥

◀  $[S(x)]_{1-p}^1 = [S(x)]_m^{m+p}$

②より

$$\int_{M-q}^M f(x) dx = \int_M^{M+q} f(x) dx$$

$$S(M) - S(M-q) = S(M+q) - S(M)$$

$$2S(M) = S(M+q) + S(M-q) \quad \dots\dots\dots ④$$

⇨ ④

◀  $[S(x)]_{M-q}^M = [S(x)]_M^{M+q}$

2 点  $(1-p, S(1-p)), (m+p, S(m+p))$  を結ぶ線分の中点について、 $x$  座標は

$$\frac{1}{2} \{(1-p) + (m+p)\} = \frac{m+1}{2} = M$$

$y$  座標は、③より

$$\frac{1}{2}\{S(1-p) + S(m+p)\} = \frac{1}{2}\{S(1) + S(m)\}$$

ここで、④において  $q = M - 1 (> 0)$  とすると

$$\begin{aligned} 2S(M) &= S(2M-1) + S(1) \\ &= S(1) + S(m) \end{aligned}$$

であるから、 $y$  座標は

$$\frac{1}{2}\{S(1) + S(m)\} = \frac{1}{2} \cdot 2S(M) = S(M)$$

となる。

以上より、中点は  $p$  の値によらず一つに定まり、関数  $y = S(x)$  のグラフ上にある。  $\Rightarrow$  ②

◀  $M = \frac{m+1}{2}$  より。

◀ 中点は  $(M, S(M))$

### 第3問

(1) 表1より、確率変数  $X$  の平均 (期待値)  $m$  は

$$m = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p \quad \Rightarrow$$
 ①

$n = 300$  は十分に大きいから、母標準偏差を  $\sigma$  とすると、標本平均  $\bar{X}$  は近似的に正規分布に従い、その平均は  $m$ 、標準偏差は  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  である。すなわち、 $\bar{X}$  は

近似的に正規分布  $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$  に従う。  $\Rightarrow$  ③

また、 $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{1}{n} \left\{ (X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2 \right\}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} (X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2) - 2\bar{X} \cdot \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n) + \frac{1}{n} \cdot n \cdot (\bar{X})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} (X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2) - 2 \cdot (\bar{X})^2 + (\bar{X})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} (X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2) - (\bar{X})^2} \quad \Rightarrow$$
 ①

で計算できる。ここで、 $X_1^2 = X_1$ 、 $X_2^2 = X_2$ 、 $\dots$ 、 $X_n^2 = X_n$  であることに着目すると

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n) - (\bar{X})^2} = \sqrt{\bar{X} - (\bar{X})^2} \\ &= \sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})} \quad \Rightarrow$$
 ②

いま、表2より

$$n = 300, \quad \bar{X} = \frac{75}{300} = \frac{1}{4}$$

であるから

$$\frac{S^2}{n} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)}{300} = \frac{1}{1600}$$

したがって、 $\bar{X}$  は、正規分布  $N\left(m, \frac{1}{1600}\right)$  に従う。

ここで

$$Z = \frac{\frac{1}{4} - m}{\frac{1}{40}}$$

とおくと、 $Z$  は近似的に標準正規分布  $N(1, 0)$  に従う。 $Z$  に対する信頼度 95% の信頼区間は、正規分布表より

$$-1.96 \leq Z \leq 1.96$$

◀  $S$  は標本の標準偏差。

◀  $\bar{X} = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$

◀  $k = 1, 2, \dots, n$  に対して  $X_k = 0$  または  $1$  であり  $X_k = 0$  のとき、 $X_k^2 = 0$   $X_k = 1$  のとき、 $X_k^2 = 1$  である。

◀  $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ ,  $\sqrt{\frac{1}{1600}} = \frac{1}{40}$

◀ 値が  $\frac{0.95}{2} = 0.475$  となる  $z_0$  を探す。

であるから、母平均  $m$  に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\frac{1}{4} - 1.96 \cdot \frac{1}{40} \leq m \leq \frac{1}{4} + 1.96 \cdot \frac{1}{40}$$

$$0.25 - 0.049 \leq m \leq 0.25 + 0.049$$

すなわち

$$0.201 \leq m \leq 0.299$$

⇒ ①

(2)  $k=4$  のとき、 $U_4=1$  となる確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot 2 = \frac{3}{128}$$

であるから、 $U_4$  の期待値は

$$E(U_4) = 1 \cdot \frac{3}{128} = \frac{3}{128}$$

同様に、 $k=5$  のとき、 $U_5=1$  となるのは

$$(7) (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (1, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 0)$$

$$(4) (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (0, 1, 1, 1, 0)$$

$$(7) (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (1, 0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1)$$

のときである。

(7), (7)が起る確率はそれぞれ

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{256}$$

(4)が起る確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{1024}$$

であるから、 $U_5$  の期待値は

$$E(U_5) = 1 \cdot \left(\frac{3}{256} \cdot 2 + \frac{9}{1024}\right) = \frac{33}{1024}$$

座標平面上の点  $(4, E(U_4))$ ,  $(5, E(U_5))$ ,  $\dots$ ,  $(300, E(U_{300}))$  が一つの直線上にあるとすると、その直線は 2 点  $\left(4, \frac{3}{128}\right)$ ,  $\left(5, \frac{33}{1024}\right)$  を通るので、その直線の式は

$$y - \frac{3}{128} = \frac{9}{1024}(x - 4)$$

より

$$y = \frac{9}{1024}x - \frac{3}{256}$$

である。よって

$$E(U_{300}) = \frac{9}{1024} \cdot 300 - \frac{3}{256} = \frac{21}{8}$$

### 研究

座標平面上の点  $(4, E(U_4))$ ,  $(5, E(U_5))$ ,  $\dots$ ,  $(300, E(U_{300}))$  が一つの直線上にある理由を考えよう。

$k$  を 4 以上の整数とし、 $A$  の個数が  $k$  のときと  $k+1$  のときでどのように変化するかを考える。

$X_1, X_2, \dots, X_k$  の値の組について、 $X_{k-3}, X_{k-2}, X_{k-1}, X_k$  の値に着目すると

$$(I) X_{k-3} = 1, X_{k-2} = 1, X_{k-1} = 1, X_k = 1$$

$$(II) X_{k-3} = 0, X_{k-2} = 1, X_{k-1} = 1, X_k = 1$$

$$(III) X_{k-3} = 0 \text{ または } 1, X_{k-2} = 0, X_{k-1} = 1, X_k = 1$$

$$(IV) X_{k-3} = 0 \text{ または } 1, X_{k-2} = 0 \text{ または } 1, X_{k-1} = 0, X_k = 1$$

$$(V) X_{k-3} = 0 \text{ または } 1, X_{k-2} = 0 \text{ または } 1, X_{k-1} = 0 \text{ または } 1, X_k = 0$$

のいずれかに当てはまる。

(I), (IV), (V) のとき、 $X_{k+1}$  の値によらず、 $A$  の個数は変化しない。

(III) のとき、 $X_{k+1} = 0$  であれば  $A$  の個数は変化しないが、 $X_{k+1} = 1$  であれば  $A$

◀  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$   
 $= (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)$   
 の 2 通りがある。

◀ (7) の  $X_5$ , (7) の  $X_1$  は、0, 1  
 のどちらの値でもよい。

◀ 直線の傾きは  
 $\frac{E(U_5) - E(U_4)}{5 - 4}$   
 $= \frac{33}{1024} - \frac{3}{128} = \frac{9}{1024}$

の個数は1だけ増加する。

(II)のとき、 $X_{k+1} = 0$ であればAの個数は変化しないが、 $X_{k+1} = 1$ であればAの個数は1だけ減少する。

以上より、Aの個数が1だけ増加する確率は

$$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{3}{256}$$

であり、Aの個数が1だけ減少する確率は

$$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{3}{1024}$$

であるから

$$E(U_{k+1}) = E(U_k) + 1 \cdot \frac{3}{256} - 1 \cdot \frac{3}{1024}$$

$$E(U_{k+1}) - E(U_k) = \frac{9}{1024}$$

となり、 $k$ の値によらず $E(U_k)$ と $E(U_{k+1})$ の差は一定である。

したがって、 $(4, E(U_4)), (5, E(U_5)), \dots, (300, E(U_{300}))$ は一つの直線上にあることがわかる。

◀  $X_{k-2} = 0, X_{k-1} = 1, X_k = 1, X_{k+1} = 1$ となる確率。

◀  $X_{k-3} = 0, X_{k-2} = 1, X_{k-1} = 1, X_k = 1, X_{k+1} = 1$ となる確率。

## 第4問

(1) 数列  $\{a_n\}$  が  $a_{n+1} - a_n = 14$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を満たすので

$$a_{n+1} = a_n + 14$$

$a_1 = 10$  のとき

$$a_2 = a_1 + 14 = 10 + 14 = 24$$

また、 $a_2 = 24$  であるから

$$a_3 = a_2 + 14 = 24 + 14 = 38$$

数列  $\{a_n\}$  は公差が14の等差数列であるから

$$a_n = a_1 + 14(n-1)$$

(2) 数列  $\{b_n\}$  が  $2b_{n+1} - b_n + 3 = 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を満たすとき

$$b_{n+1} + 3 = \frac{1}{2}(b_n + 3)$$

よって、数列  $\{b_n + 3\}$  は初項  $b_1 + 3$ 、公比  $\frac{1}{2}$  の等比数列であるから

$$b_n + 3 = (b_1 + 3) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

したがって

$$b_n = (b_1 + 3) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 3$$

(3)  $(c_n + 3)(2c_{n+1} - c_n + 3) = 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) .....①

(i) 数列  $\{c_n\}$  が①を満たし、 $c_1 = 5$  のとき

$$(c_1 + 3)(2c_2 - c_1 + 3) = 0$$

$$8(2c_2 - 2) = 0$$

よって

$$c_2 = 1$$

数列  $\{c_n\}$  が①を満たし、 $c_3 = -3$  のとき

$$(c_2 + 3)(2c_3 - c_2 + 3) = 0 \dots\dots\dots(*)$$

$$-(c_2 + 3)^2 = 0$$

よって

$$c_2 = -3$$

さらに

◀ 方程式

$$2x - x + 3 = 0$$

の解は  $x = -3$  である。

◀ ①に  $n = 1$  を代入した。

◀ ①に  $n = 2$  を代入した。

$$(c_1 + 3)(2c_2 - c_1 + 3) = 0 \quad \dots\dots\dots (**)$$

$$-(c_1 + 3)^2 = 0$$

よって

$$c_1 = -3$$

(ii) 数列  $\{c_n\}$  が  $c_3 = -3$  と①を満たし、 $c_4 = 5$  のとき

$$(c_4 + 3)(2c_5 - c_4 + 3) = 0$$

$$8(2c_5 - 2) = 0$$

ゆえに

$$c_5 = 1$$

数列  $\{c_n\}$  が  $c_3 = -3$  と①を満たし、 $c_4 = 83$  のとき

$$(c_4 + 3)(2c_5 - c_4 + 3) = 0$$

$$86(2c_5 - 80) = 0$$

ゆえに

$$c_5 = 40$$

(iii) 命題 A が真であることを証明するには、①と  $c_1 \neq -3$  を満たす数列  $\{c_n\}$  について、 $n = k$  のとき  $c_n \neq -3$  が成り立つと仮定すると、 $n = k + 1$  のときも  $c_n \neq -3$  が成り立つことを示せばよい。  $\Rightarrow$  ③

(iv) (I)について、(iii)の命題 A が真であることから、 $c_1 = 3 (\neq -3)$  かつ  $c_{100} = -3$  であり、かつ①を満たす数列  $\{c_n\}$  はない。すなわち、偽である。

(II)について、(iii)の命題 A の対偶を考えると、命題「数列  $\{c_n\}$  が①を満たし、ある自然数  $n$  について  $c_n = -3$  であるとき、 $c_1 = -3$  である」は真であるから、(II)は真である。

(III)について、(i)、(ii)での考察より、例えば

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{99} = -3, \quad c_{100} = 3$$

である数列  $\{c_n\}$  は①を満たす。すなわち、真である。

以上より、真偽の組合せとして正しいものは④である。  $\Rightarrow$  ④

**研究**

(iii)の証明の方針は、数学的帰納法の手順である。命題 A が真であることは、次のように証明できる。

(a)  $n = 1$  のとき、仮定より  $c_1 \neq -3$  であるから、 $c_n \neq -3$  は成り立つ。

(b)  $n = k (k = 1, 2, 3, \dots)$  のとき  $c_n \neq -3$  が成り立つ、すなわち  $c_k \neq -3$  と仮定する。

このとき、 $c_k + 3 \neq 0$  であるから、①より

$$2c_{k+1} - c_k + 3 = 0$$

$$c_{k+1} = \frac{1}{2}c_k - \frac{3}{2}$$

ここで、 $c_k \neq -3$  のとき

$$c_{k+1} \neq \frac{1}{2} \cdot (-3) - \frac{3}{2}$$

より

$$c_{k+1} \neq -3$$

である。

よって、(a)、(b)より、すべての自然数  $n$  について  $c_n \neq -3$  である。 (証明終)

◀①に  $n = 1$  を代入した。

◀ $c_3 = c_2$  であり、(\*)において  $c_2, c_3$  をそれぞれ  $c_1, c_2$  に置き換えたものが(\*\*)であるから  $c_1 = c_2 = -3$  と考えることもできる。

◀①に  $n = 4$  を代入した。

◀①に  $n = 4$  を代入した。

◀「研究」参照。

◀ $c_1 \neq -3$  より、すべての自然数  $n$  で  $c_n \neq -3$  である。

◀「解答」の(III)と同様に

$c_1 = c_2 = \dots = c_{99} = -3$  である数列  $\{c_n\}$  において、 $c_{100}$  はどのような値でもよいから

$c_1 = c_2 = \dots = c_{100} = -3$  である数列  $\{c_n\}$  があると考えてもよい。

◀具体的な数列  $\{c_n\}$  を一つ見つければよい。

# 第5問

(1) A(2, 7, -1), B(3, 6, 0), C(-8, 10, -3), D(-9, 8, -4) より

$$\vec{AB} = (3-2, 6-7, 0-(-1)) = (1, -1, 1)$$

$$\vec{CD} = (-9-(-8), 8-10, -4-(-3)) = (-1, -2, -1)$$

よって

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 1 \times (-1) + (-1) \times (-2) + 1 \times (-1) = 0$$

(2) Pが $\ell_1$ 上にあるから、 $\vec{AP} = s\vec{AB}$ を満たす実数sがあり

$$\vec{OP} - \vec{OA} = s\vec{AB}$$

より

$$\vec{OP} = \vec{OA} + s\vec{AB}$$

⇒ ②

が成り立つ。よって

$$|\vec{OP}| = |\vec{OA} + s\vec{AB}|$$

であり、この式の両辺を2乗すると

$$|\vec{OP}|^2 = |\vec{OA}|^2 + 2s\vec{OA} \cdot \vec{AB} + s^2|\vec{AB}|^2 \dots\dots\dots ①$$

ここで

$$|\vec{OA}|^2 = 2^2 + 7^2 + (-1)^2 = 54$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{AB} = 2 \times 1 + 7 \times (-1) + (-1) \times 1 = -6$$

$$|\vec{AB}|^2 = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3$$

したがって、①は

$$|\vec{OP}|^2 = 3s^2 - 12s + 54$$

また、 $|\vec{OP}|$ が最小となるとき、直線OPと $\ell_1$ は垂直である。

よって

$$\vec{OP} \cdot \vec{AB} = 0$$

⇒ ①

太郎さんの考え方によると

$$\begin{aligned} \vec{OP} \cdot \vec{AB} &= (\vec{OA} + s\vec{AB}) \cdot \vec{AB} = \vec{OA} \cdot \vec{AB} + s|\vec{AB}|^2 \\ &= -6 + 3s = 0 \end{aligned}$$

より、 $s = 2$ のとき $|\vec{OP}|$ が最小となる。

**別解**

花子さんの考え方によると

$$|\vec{OP}|^2 = 3s^2 - 12s + 54 = 3(s-2)^2 + 42$$

より、やはり $s = 2$ のとき $|\vec{OP}|$ が最小となる。

(3) Qは $\ell_2$ 上にあるから、(2)においてPについて考えたときと同様に

$$\vec{PQ} = \vec{PC} + t\vec{CD}$$

を満たす実数tがある。

Pを $\ell_1$ 上で固定したとき、(2)の考察より、 $|\vec{PQ}|$ が最小となるのは、直線PQと $\ell_2$ が垂直となるときである。

よって、 $\vec{PQ} \cdot \vec{CD} = 0$ より

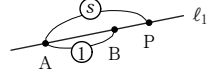
$$(\vec{PC} + t\vec{CD}) \cdot \vec{CD} = 0$$

すなわち

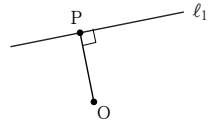
$$\vec{PC} \cdot \vec{CD} + t|\vec{CD}|^2 = 0 \dots\dots\dots ②$$

ここで、Pは $\ell_1$ 上の点であるから、実数uを用いて

◀イメージ図



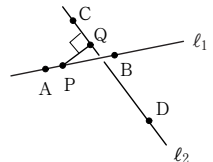
◀イメージ図



◀ $|\vec{OP}| > 0$ より、 $|\vec{OP}|^2$ が最小のとき $|\vec{OP}|$ も最小。

◀あとの計算を考え、ベクトルの始点をPにした。

◀イメージ図



$$\vec{OP} = \vec{OA} + u\vec{AB}$$

と表せる。したがって、Pの座標は

$$P(2+u, 7-u, -1+u)$$

であり

$$\vec{PC} = \vec{OC} - \vec{OP} = (-10-u, 3+u, -2-u)$$

$$\vec{PC} \cdot \vec{CD} = (-10-u) \times (-1) + (3+u) \times (-2) + (-2-u) \times (-1) = 6$$

$$|\vec{CD}|^2 = (-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 = 6$$

より、②は

$$6+6t=0$$

$$t=-1$$

よって

$$\vec{PQ} = \vec{PC} - \vec{CD} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

次に、Pを動かす。このとき、Qは、Pに応じて③を満たす位置にあるとする。

$|\vec{PQ}|$ が最小となるときの、直線PQと $l_1$ は垂直であるから、 $\vec{PQ} \cdot \vec{AB} = 0$ より

$$(\vec{PC} - \vec{CD}) \cdot \vec{AB} = 0$$

ここで

$$\begin{aligned} (\vec{PC} - \vec{CD}) \cdot \vec{AB} &= \vec{PC} \cdot \vec{AB} - \vec{CD} \cdot \vec{AB} \\ &= (-10-u) \times 1 + (3+u) \times (-1) + (-2-u) \times 1 \\ &= -15-3u \end{aligned}$$

であるから

$$-15-3u=0$$

$$u=-5$$

したがって、Pの座標は

$$(-3, 12, -6)$$

③より

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= \vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OP} + \vec{PC} - \vec{CD} = \vec{OC} - \vec{CD} \\ &= (-7, 12, -2) \end{aligned}$$

したがって、Qの座標は

$$(-7, 12, -2)$$

**別解**

太郎さんの考え方で解くと次のようになる。

$$\vec{OP} = \vec{OA} + s\vec{AB} = (2+s, 7-s, -1+s)$$

$$\vec{OQ} = \vec{OC} + t\vec{CD} = (-8-t, 10-2t, -3-t)$$

より

$$\begin{aligned} |\vec{PQ}|^2 &= \{-8-t-(2+s)\}^2 + \{10-2t-(7-s)\}^2 + \{-3-t-(-1+s)\}^2 \\ &= (-10-t-s)^2 + (3-2t+s)^2 + (-2-t-s)^2 \\ &= 6(t+1)^2 + 3(s+5)^2 + 32 \end{aligned}$$

であるから、 $t=-1, s=-5$ のときに $|\vec{PQ}|$ は最小となる。

したがって、点Pの座標は

$$(2-5, 7-(-5), -1-5) \text{ すなわち } (-3, 12, -6)$$

点Qの座標は

$$(-8-(-1), 10-2 \times (-1), -3-(-1)) \text{ すなわち } (-7, 12, -2)$$

である。

$$\begin{aligned} \leftarrow \vec{OA} &= (2, 7, -1), \\ \vec{AB} &= (1, -1, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leftarrow \vec{OC} &= (-8, 10, -3), \\ \vec{CD} &= (-1, -2, -1) \end{aligned}$$

$$\leftarrow \vec{PQ} = \vec{PC} + t\vec{CD} \text{ より。}$$

$$\begin{aligned} \leftarrow (1) \text{ より} \\ \vec{CD} \cdot \vec{AB} &= \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0 \end{aligned}$$

$$\leftarrow (2+(-5), 7-(-5), -1+(-5))$$

$$\begin{aligned} \leftarrow \vec{OC} &= (-8, 10, -3), \\ \vec{CD} &= (-1, -2, -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leftarrow \text{ここから花子さんの考え方} \\ \vec{PQ} \\ &= (-s-t-10, s-2t+3, -s-t-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{より} \\ \vec{PQ} \cdot \vec{AB} \\ &= (-s-t-10) \times 1 \\ &\quad + (s-2t+3) \times (-1) \\ &\quad + (-s-t-2) \times 1 \\ &= -3s-15 \\ \vec{PQ} \cdot \vec{CD} \\ &= (-s-t-10) \times (-1) \\ &\quad + (s-2t+3) \times (-2) \\ &\quad + (-s-t-2) \times (-1) \\ &= 6+6t \end{aligned}$$

$$\vec{PQ} \perp \vec{AB}, \vec{PQ} \perp \vec{CD} \text{ より}$$

$$\begin{cases} -3s-15=0 \\ 6+6t=0 \end{cases}$$

であることから

$$s=-5, t=-1$$

と求めることもできる。