

第1問

[1]

$$50(x^2 + y^2) = (x + 7y)^2 \dots\dots\dots ①$$

$$-4\sqrt{3}x + y = 1 \dots\dots\dots ②$$

①の左辺から右辺を引くと

$$\begin{aligned} 50(x^2 + y^2) - (x + 7y)^2 &= 50x^2 + 50y^2 - (x^2 + 14xy + 49y^2) \\ &= 49x^2 - 14xy + y^2 \\ &= (7x - y)^2 \end{aligned}$$

したがって、①より  $(7x - y)^2 = 0$  であるから

$$\begin{aligned} 7x - y &= 0 \\ y &= 7x \dots\dots\dots ③ \end{aligned}$$

◀  $A^2 = 0 \iff A = 0$

③を②に代入すると

$$-4\sqrt{3}x + 7x = 1$$

すなわち

$$x = \frac{1}{7 - 4\sqrt{3}} = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{(7 - 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3})} = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{49 - 48} = 7 + 4\sqrt{3}$$

◀ 分母を有理化する。

③より

$$y = 7(7 + 4\sqrt{3})$$

また

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 50 &= x^2 + (7x)^2 - 50 \\ &= 50(x^2 - 1) \\ &= 50\{(7 + 4\sqrt{3})^2 - 1\} \\ &= 50(49 + 56\sqrt{3} + 48 - 1) \\ &= 400(12 + 7\sqrt{3}) \end{aligned}$$

◀  $50(96 + 56\sqrt{3})$

[2]

道路㊸の A から B までの道のりは 75 km であるから、経路 2 で道路㊸を通る道のりは  $(75 - x)$  km である。したがって、道路㊸を通っている時間は

$$\frac{75 - x}{30} \text{ 時間}$$

である。また、道路㊹を通っている時間は

$$\frac{48}{80} = \frac{3}{5} \text{ (時間)}$$

◀ 48 km の道のりを時速 80 km で走る。

であるから、経路 2 を選んだ場合の P から Q までの所要時間は

$$\left( \frac{75 - x}{30} + \frac{3}{5} \right) \text{ 時間}$$

である。経路 1 を選んだ場合の所要時間は  $\frac{x}{30}$  時間であるから、経路 2 を選ぶ方が経路 1 を選ぶより短い時間で Q に到着できることを表す不等式は

$$\frac{75 - x}{30} + \frac{3}{5} < \frac{x}{30} \quad \Leftrightarrow \textcircled{0}$$

◀ (経路 2 の所要時間) < (経路 1 の所要時間)

となる。これを解くと

$$75 - x + 18 < x$$

$$-2x < -93$$

$$x > 46.5$$

◀ 不等式の両辺に 30 をかける。

となる。

[3]

(1)  $\triangle ABC$ において、外接円の半径を  $R$  とすると、正弦定理より

$$\sin \angle BAC = \frac{BC}{2R} = \frac{4}{2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ < \angle BAC < 180^\circ$  であるから、 $\angle BAC$  として考えられる角度のうち、小さい方は  $60^\circ$  である。  $\Rightarrow$  ②

また、大きい方は  $120^\circ$  である。  $\Rightarrow$  ④

さらに、 $\triangle ABC$  の面積が  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$  であるとき

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC$$

より

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AB \cdot AC = 3 \quad \dots\dots\dots ①$$

である。

$\angle BAC = 60^\circ$  のとき、余弦定理より

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle BAC$$

であるから

$$4^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot 3 \cos 60^\circ$$

$$16 = AB^2 + AC^2 - 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$AB^2 + AC^2 = 19$$

したがって

$$(AB + AC)^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC = 19 + 2 \cdot 3 = 25$$

$AB + AC > 0$  より

$$AB + AC = 5$$

$$AC = 5 - AB \quad \dots\dots\dots ②$$

である。①、②より

$$AB(5 - AB) = 3$$

$$AB^2 - 5AB + 3 = 0$$

$$AB = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

また、 $\angle BAC = 120^\circ$  のとき、同様に考えると

$$4^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot 3 \cos 120^\circ$$

$$AB^2 + AC^2 = 13$$

$$(AB + AC)^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC = 13 + 2 \cdot 3 = 19$$

$AB + AC > 0$  より

$$AB + AC = \sqrt{19}$$

$AC = \sqrt{19} - AB$  を①に代入して

$$AB(\sqrt{19} - AB) = 3$$

$$AB^2 - \sqrt{19}AB + 3 = 0$$

$$AB = \frac{\sqrt{19} \pm \sqrt{7}}{2}$$

となる。

(2)

(a) 二つの三角形  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A'B'C'$  において

$$BC = B'C' = 4, \triangle ABC = \triangle A'B'C' = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

外接円の半径はともに  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$$\leftarrow \frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R$$

◀面積公式。

◀いずれも  $AB > 0$  を満たす。

◀余弦定理を利用する。

◀①より。

◀いずれも  $AB > 0$  を満たす。

であるとき、(1)より、 $\angle ABC = 60^\circ$ 、 $\angle A'B'C' = 120^\circ$  となる場合が考えられ、このとき  $\triangle ABC$  と  $\triangle A'B'C'$  は合同ではない。

したがって、命題(a)は偽である。

(b) 二つの三角形  $\triangle ABC$ 、 $\triangle A'B'C'$  において

$$\angle BAC = \angle B'A'C' = \alpha, \quad \triangle ABC = \triangle A'B'C' = S,$$

外接円の半径はともに  $R$

であるとする。このとき、正弦定理より

$$BC = B'C' = 2R \sin \alpha \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

また、面積公式より

$$CA \cdot AB = C'A' \cdot A'B' = \frac{2S}{\sin \alpha} \quad \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

ここで、余弦定理より

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 - 2CA \cdot AB \cos \alpha$$

$$B'C'^2 = C'A'^2 + A'B'^2 - 2C'A' \cdot A'B' \cos \alpha$$

であるから、 $\textcircled{3}$ 、 $\textcircled{4}$ より

$$CA^2 + AB^2 = C'A'^2 + A'B'^2$$

さらに $\textcircled{4}$ より

$$CA^2 + 2CA \cdot AB + AB^2 = C'A'^2 + 2C'A' \cdot A'B' + A'B'^2$$

$$(CA + AB)^2 = (C'A' + A'B')^2$$

辺の長さは正であるから

$$CA + AB = C'A' + A'B' \quad \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

$\textcircled{4}$ 、 $\textcircled{5}$ より、2 辺の長さの和と積がそれぞれ等しいから、 $CA$  と  $AB$  の長さの組は、 $C'A'$  と  $A'B'$  の長さの組と一致する。

したがって、三角形の 3 辺の長さがそれぞれ等しいから、 $\triangle ABC$  と  $\triangle A'B'C'$  は合同であり、命題(b)は真である。  $\Rightarrow \textcircled{2}$

◀  $BC$  以外の 2 辺の長さが異なる。

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft S &= \frac{1}{2} CA \cdot AB \sin \alpha \\ S &= \frac{1}{2} C'A' \cdot A'B' \sin \alpha \end{aligned}$$

◀  $CA = C'A'$ 、 $AB = A'B'$   
または  
 $CA = A'B'$ 、 $AB = C'A'$

## 第2問

[1]

(1)  $y = \frac{1}{8}|x^2 + 2x - 8| + \frac{1}{8}(x^2 - 6x)$  ..... ①

(i)  $x^2 + 2x - 8 < 0$  を解くと

$$(x+4)(x-2) < 0$$

$$-4 < x < 2$$

である。このとき、①は

$$y = -\frac{1}{8}(x^2 + 2x - 8) + \frac{1}{8}(x^2 - 6x) = -x + 1$$

と変形できる。また、 $x \leq -4$ ,  $2 \leq x$  のとき、①は

$$y = \frac{1}{8}(x^2 + 2x - 8) + \frac{1}{8}(x^2 - 6x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$$

と変形できる。

(ii)  $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - 2x) - 1$$

$$= \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{5}{4}$$

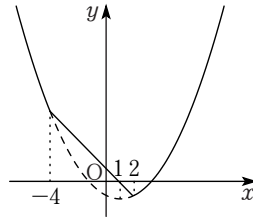
と変形できるから、このグラフの頂点の座標は

$$\left(1, -\frac{5}{4}\right)$$

である。

(iii) (i), (ii) より、①のグラフは右の図のようになるから、グラフとして最も適当なものは ① である。

⇨ ①



◀  $A < 0$  のとき  
 $|A| = -A$

◀  $A \geq 0$  のとき  
 $|A| = A$

◀ 平方完成する。

(2)  $y = -\frac{1}{8}|x^2 - 9| - \frac{1}{8}x^2 + x$

は、 $x^2 - 9 < 0$  となる  $x$  の範囲では  $x^2$  の項が消えて  $x$  の係数が 1 の 1 次関数になり、 $x^2 - 9 > 0$  となる  $x$  の範囲では  $x^2$  の係数が  $-\frac{1}{4}$  の 2 次関数になる。

したがって、グラフとして最も適当なものは ③ である。

$$y = \frac{1}{8}|x^2 - 9| - \frac{1}{8}x^2 + x$$

は、 $x^2 - 9 < 0$  となる  $x$  の範囲では  $x^2$  の係数が  $-\frac{1}{4}$  の 2 次関数になり、 $x^2 - 9 > 0$  となる  $x$  の範囲では  $x^2$  の項が消えて  $x$  の係数が 1 の 1 次関数になる。

したがって、グラフとして最も適当なものは ⑧ である。

$$y = \frac{1}{8}|x^2 + 2\sqrt{5}x - 4| + \frac{1}{8}(x^2 + 2\sqrt{5}x)$$

は、 $x^2 + 2\sqrt{5}x - 4 < 0$  となる  $x$  の範囲では  $x^2$  の項および  $x$  の項が消えて定数関数になり、 $x^2 + 2\sqrt{5}x - 4 > 0$  となる  $x$  の範囲では  $x^2$  の係数が  $\frac{1}{4}$  の 2 次関数になる。

したがって、グラフとして最も適当なものは ② である。

◀ 中央が右上がりの直線、両端が上に凸の放物線になる。

◀ 中央が上に凸の放物線、両端が右上がりの直線になる。

◀ 中央が  $x$  軸に平行、両端が下に凸の放物線になる。

[2]

(1) 元の評点が

1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5

であったとき

$$\bar{x} = (1 + 2 \times 2 + 3 \times 4 + 4 \times 2 + 5) \div 10 = 30 \div 10 = 3$$

$$\bar{y} = (\bar{x} \times 10 - 1 - 5) \div 8 = 24 \div 8 = 3$$

$$s^2 = \{(1-3)^2 + (2-3)^2 \times 2 + (3-3)^2 \times 4 + (4-3)^2 \times 2 + (5-3)^2\} \div 10 \\ = 12 \div 10 = 1.2$$

$$t^2 = \{s^2 \times 10 - (1-3)^2 - (5-3)^2\} \div 8 = 4 \div 8 = 0.5$$

◀元の評点の平均を利用する。

◀元の評点の分散を利用する。

(2)  $A = 2\bar{z}$ ,  $B = (n-2)\bar{y}$ であるから

$$\bar{x} = \frac{A+B}{n} = \frac{2\bar{z} + (n-2)\bar{y}}{n} \\ = \frac{2}{n}\bar{z} + \frac{n-2}{n}\bar{y}$$

⇒ ⑤, ⑥

と表せる。

これより,  $\bar{x} \leq \bar{y}$  のとき

$$\frac{2}{n}\bar{z} + \frac{n-2}{n}\bar{y} \leq \bar{y}$$

より

$$\bar{z} \leq \bar{y}$$

が成り立つ。逆に,  $\bar{z} \leq \bar{y}$  のとき

$$\bar{x} = \frac{2}{n}\bar{z} + \frac{n-2}{n}\bar{y} \leq \frac{2}{n}\bar{y} + \frac{n-2}{n}\bar{y} = \bar{y}$$

であるから,  $\bar{x} \leq \bar{y}$  が成り立つ。

よって,  $\bar{x} \leq \bar{y}$  が成り立つための必要十分条件は

$$\bar{z} \leq \bar{y}$$

⇒ ②

である。

$$(3)(i) \quad t^2 = \frac{ma^2 + (8-m)b^2}{8} - (\bar{y})^2 \\ = \frac{ma^2 + (8-m)b^2}{8} - \left\{ \frac{ma + (8-m)b}{8} \right\}^2 \\ = \frac{8ma^2 + 8(8-m)b^2 - m^2a^2 - 2m(8-m)ab - (8-m)^2b^2}{64} \\ = \frac{m(8-m)a^2 - 2m(8-m)ab + m(8-m)b^2}{64} \\ = \frac{m(8-m)(a^2 - 2ab + b^2)}{64} \\ = \frac{m(8-m)(a-b)^2}{64}$$

⇒ ④

と表せる。

(ii) 4人の選手⑥~⑧について, (i)を利用して, それぞれ  $t^2$  を計算する。

⑥ 調整後の評点は4個の4と4個の5であるから

$$t^2 = \frac{4 \times 4 \times (4-5)^2}{64} = \frac{16}{64} \left( = \frac{1}{4} \right)$$

⑦ 調整後の評点は2個の3と6個の4であるから

$$t^2 = \frac{2 \times 6 \times (3-4)^2}{64} = \frac{12}{64} \left( = \frac{3}{16} \right)$$

⑧ 調整後の評点は4個の2と4個の4であるから

$$t^2 = \frac{4 \times 4 \times (2-4)^2}{64} = \frac{64}{64} (= 1)$$

⑨ 調整後の評点は6個の1と2個の3であるから

$$t^2 = \frac{6 \times 2 \times (1-3)^2}{64} = \frac{48}{64} \left( = \frac{3}{4} \right)$$

したがって,  $t^2$  が最も大きい選手は⑧である。

⇒ ②

◀評点の2乗の平均から, 評点の平均の2乗を引く。

◀(i)の結果を利用する。

### 第3問

(1) 2枚目のタイルは、1枚目のタイルのすぐ右かすぐ上のいずれかに貼られるから、2枚目の時点の配置が図1のAとなる確率は $\frac{1}{2}$ である。

(2) AからはBまたはCにそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で推移し、その他に配置がBとなる場合はないから、配置がBとなる確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

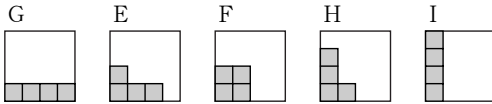
である。

また、配置がCとなるのは、Aから推移する場合と、2枚目の時点でタイルが縦に2枚並んでいる配置から推移する場合があるから、配置がCとなる確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

である。

(3)(i) 4枚目のタイルを貼った時点での配置を以下のように区別する。



配置がEとなるのは

- (a) Bから左上にタイルを貼る
- (b) Cから右下にタイルを貼る

の二つの場合があり、Dからは推移しないから、3枚目の時点での配置はBとCだけである。 ⇨ ③

BからはGまたはEに推移するから、(a)の確率は

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

CからはEまたはFまたはHに推移するから、(b)の確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

したがって、配置がEとなる確率は

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{7}{24} \dots\dots\dots ①$$

である。

次に、配置がFとなるのは

Cから右上にタイルを貼る

場合のみであり、B、Dからは推移しないから、3枚目の時点での配置はCだけである。 ⇨ ①

CからはEまたはFまたはHに推移するから、配置がFとなる確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

である。

(ii) 2枚目の配置がAで、4枚目の配置がEになるのは

- (c) A→B→Eと推移する
- (d) A→C→Eと推移する

の二つの場合がある。(c)の確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

(d)の確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

◀それぞれの配置から、何通りの推移の仕方があるかを考える。

◀2枚目の配置がA、かつ4枚目の配置がEである場合を考える。

したがって、2枚目の配置がAで4枚目の配置がEとなる確率は

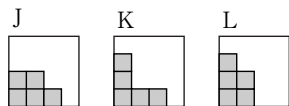
$$\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}$$

よって、①より、求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{5}{24}}{\frac{7}{24}} = \frac{5}{7}$$

である。

(iii) 5枚目の配置として以下の場合を考える。



6枚目の配置が図2となるのは、4枚目の配置から考えると次のように推移するときである。

(e) E→J→図2と推移する

(f) E→K→図2と推移する

(g) F→J→図2と推移する

(h) F→L→図2と推移する

(i) H→K→図2と推移する

(j) H→L→図2と推移する

(e), (f) となる確率は、それぞれ

$$\frac{7}{24} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{216}$$

(g), (h) となる確率は、それぞれ

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{36}$$

4枚目の配置がHとなる確率は、Eとの対称性から  $\frac{7}{24}$  である。

したがって、(i), (j) となる確率は、それぞれ

$$\frac{7}{24} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{216}$$

よって、6枚目の配置が図2となる確率は

$$\frac{7}{216} \times 4 + \frac{1}{36} \times 2 = \frac{5}{27}$$

である。

$$\leftarrow \frac{(A \rightarrow E \text{ となる確率})}{(E \text{ となる確率})}$$

◀Eでタイルを貼る位置は3箇所、J、Kでタイルを貼る位置は3箇所。

◀Fでタイルを貼る位置は2箇所、Lでタイルを貼る位置は3箇所。

◀Hでタイルを貼る位置は3箇所。

## 第4問

[1]

(1) 等式

$$2xy - 4x - 3y = 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を変形すると

$$2x(y-2) - 3y = 0$$

$$2x(y-2) - 3(y-2) - 6 = 0$$

$$(2x-3)(y-2) = 6$$

ここで、 $x, y$  は整数であるから  $2x-3, y-2$  も整数であり、さらに  $2x-3$  は奇数である。したがって、6の約数に注目すると

$$(2x-3, y-2) = (1, 6), (3, 2), (-1, -6), (-3, -2)$$

これより

$$(x, y) = (2, 8), (3, 4), (1, -4), (0, 0)$$

となるから、①を満たす整数  $x, y$  の組は4個ある。

◀一つの文字  $x$  でくくる。

◀ $2x-3$  が奇数であることに気づくと候補を絞れる。

この4組について  $xy$  の値を求めると、順に

$$xy = 16, 12, -4, 0$$

であるから、 $xy$  が最大になるのは

$$(x, y) = (2, 8)$$

のときである。

(2)  $2xy - 4x - 3y = 3a$  を変形すると

$$(2x - 3)(y - 2) = 3a + 6 = 3(a + 2)$$

$2x - 3$  が奇数であることに注意すると、この等式を満たす整数  $x, y$  の組がちょうど8個になるとき、 $3(a + 2)$  は奇数の約数を8個もつ。すなわち、正の奇数の約数を4個もつ。

$a$  は0以上の整数より、 $3(a + 2)$  は6以上の3の倍数であるから、このような数で最小のものは

$$3(a + 2) = 15$$

$$a = 3$$

したがって、最小の  $a$  は **3** である。

[2]

$$M = a \times 7^2 + b \times 7 + c$$

$$N = c \times 7^2 + b \times 7 + a$$

であるから

$$X = M - N$$

$$= (a \times 7^2 + b \times 7 + c) - (c \times 7^2 + b \times 7 + a)$$

$$= (a - c) \times 7^2 + c - a$$

⇨ ⑤, ②

となる。この式は

$$X = (a - c - 1) \times 7^2 + 7^2 + c - a$$

$$= (a - c - 1) \times 7^2 + 6 \times 7 + 7 + c - a$$

と変形できる。これより  $X = def_{(7)}$  と表すと、 $Y = fed_{(7)}$  は

$$Y = (7 + c - a) \times 7^2 + 6 \times 7 + a - c - 1$$

したがって

$$\begin{aligned} X + Y &= \{(a - c - 1) \times 7^2 + 6 \times 7 + 7 + c - a\} \\ &\quad + \{(7 + c - a) \times 7^2 + 6 \times 7 + a - c - 1\} \\ &= (a - c - 1 + 7 + c - a) \times 7^2 + (6 + 6) \times 7 \\ &\quad + (7 + c - a + a - c - 1) \end{aligned}$$

$$= 6 \times 7^2 + (7 + 5) \times 7 + 6$$

$$= 6 \times 7^2 + 7^2 + 5 \times 7 + 6$$

$$= 1 \times 7^3 + 0 \times 7^2 + 5 \times 7 + 6$$

となるから、 $X + Y = pqrs_{(7)}$  と表すと

$$p = 1, q = 0, r = 5, s = 6$$

⇨ ①, ④, ⑤, ⑥

となる。

◀ ①の右辺に  $3a$  を加えた式。

◀ 正の奇数の約数は  
1, 3, 5, 15

◀  $7^2 = (6 + 1) \times 7$   
 $= 6 \times 7 + 7$

◀  $6 + 6 = 7 + 5$

◀  $6 \times 7^2 + 7^2$   
 $= 7 \times 7^2$   
 $= 7^3$

# 第5問

(1)  $\triangle ABC$  の外接円を  $O$  とする。

(i)  $AP, CR$  は円  $O$  の直径であるから

$$\angle PCA = \angle RAC = 90^\circ$$

また、点  $H$  は  $\triangle ABC$  の垂心であるから

$$BH \perp AC$$

よって、直線  $AC$  は三つの直線  $AR, CP, BH$  のそれぞれと垂直である。  $\Rightarrow$  ②

次に、 $CR, BQ$  は円  $O$  の直径であるから

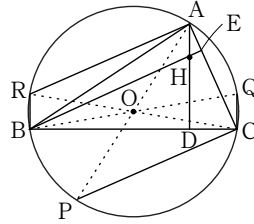
$$\angle RBC = \angle QCB = 90^\circ$$

また、点  $H$  は  $\triangle ABC$  の垂心であるから

$$AH \perp BC$$

よって、直線  $BC$  は三つの直線  $AH, BR, CQ$  のそれぞれと垂直である。

$\Rightarrow$  ⑥



◀ 円の性質。

(ii)  $\triangle ADC$  と直線  $BE$  において、メネラウスの定理より

$$\frac{AH}{HD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

$BD : DC = 4 : 1, AE : EC = 2 : 3$  より

$$\frac{AH}{HD} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

$$\frac{AH}{HD} = \frac{5}{6}$$

である。

ここで、 $AR \parallel HB, AH \parallel RB$  より、四角形  $ARBH$  は平行四辺形であるから

$$\triangle ARB \equiv \triangle BHA$$

したがって

$$\triangle ARB = \triangle BHA = \frac{5}{11} \triangle ABD = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{5} \triangle ABC = \frac{4}{11} \triangle ABC$$

であるから、 $\triangle ARB$  の面積は  $\triangle ABC$  の面積の  $\frac{4}{11}$  倍である。

(2)  $\triangle ABP$  と  $\triangle ADC$  は相似である。  $\Rightarrow$  ①

なぜならば、 $\angle ABP = \angle ADC = 90^\circ$  より  $\triangle ABP$  と  $\triangle ADC$  はいずれも直角三角形であり、また、円周角の定理より

$$\angle APB = \angle ACD \quad \Rightarrow$$
 ①

が成り立つからである。

したがって

$$\angle BAP = \angle DAC \quad \dots\dots\dots ①$$

が成り立つ。

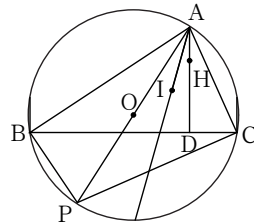
また、点  $I$  は  $\triangle ABC$  の内心であるから

$$\angle BAI = \angle CAI \quad \dots\dots\dots ②$$

が成り立つ。①, ②より

$$\begin{aligned} \angle OAI &= \angle BAI - \angle BAP \\ &= \angle CAI - \angle DAC \\ &= \angle HAI \end{aligned}$$

であるから、命題



◀  $AR \perp AC, BH \perp AC$  より  
 $AR \parallel HB$   
 $AH \parallel RB$  についても同様。

◀  $\triangle BHA : \triangle ABD$   
 $= AH : AD$   
 $= 5 : 11$   
 $\triangle ABD : \triangle ABC$   
 $= BD : BC$   
 $= 4 : 5$

◀ 残りの角が等しい。

◀ 点  $I$  は  $\angle BAC$  の二等分線上にある。

