

第1問

[1]

x についての方程式

$$(2a + 4b - 2)x^2 + (5a + 11)x - b - 8 = 0 \quad \text{①}$$

を考える。

(1) $a = 1$ のとき、 b に着目すると、①の左辺は

$$(4x^2 - 1)b + 16x - 8$$

と表せる。この式を因数分解すると

$$(2x + 1)(2x - 1)b + 8(2x - 1)$$

$$= (2x - 1)(2bx + b + 8)$$

となる。したがって、 $x = \frac{1}{2}$ は①の解の一つである。

(2) $b = 2$ とする。

(i) ①の左辺を因数分解すると

$$(2a + 6)x^2 + (5a + 11)x - 10$$

$$= (2x^2 + 5x)a + (6x^2 + 11x - 10)$$

$$= (2x + 5)xa + (3x - 2)(2x + 5)$$

$$= (2x + 5)\{(a + 3)x - 2\}$$

である。このとき、①は

$$(2x + 5)\{(a + 3)x - 2\} = 0 \quad \text{③}$$

とかける。

(ii) ③より、①の解は $a \neq -3$ において

$$x = -\frac{5}{2}, \frac{2}{a+3}$$

であり、 $a = 2\sqrt{2}$ のとき

$$\frac{2}{a+3} = \frac{2}{2\sqrt{2}+3} = \frac{2(2\sqrt{2}-3)}{(2\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}-3)} = 6 - 4\sqrt{2}$$

であるから、①の解は

$$x = -\frac{5}{2}, 6 - 4\sqrt{2}$$

となる。

(iii) $a = -3$ のとき、③は

$$(2x + 5)\{-3 + 3\}x - 2 = 0 \quad \text{つまり} \quad 2x + 5 = 0$$

となるため、①の解は $x = -\frac{5}{2}$ だけである。よって、 $a = -3$ であることは、

①の解が $x = -\frac{5}{2}$ だけであるための十分条件である。

一方、①の解が $x = -\frac{5}{2}$ だけであるのは、③より

$$x \text{ の方程式 } (a + 3)x - 2 = 0 \text{ が}$$

$$\text{解をもたない、または、} x = -\frac{5}{2} \text{ を解にもつ}$$

ときである。 x の方程式 $(a + 3)x - 2 = 0$ が解をもたないのは

$$a = -3$$

のときであり、 x の方程式 $(a + 3)x - 2 = 0$ が $x = -\frac{5}{2}$ を解にもつのは

$$(a + 3) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - 2 = 0$$

$$5a + 15 + 4 = 0$$

◀ 「次数が最も低い文字について整理する」という考え方を誘導している。

◀ b の値に関わらず、①は

$$x = \frac{1}{2}$$

を解にもつ。

◀ (1)の因数分解と同様、次数が最も低い文字（ここでは a ）に着目して式を整理した。

◀ 十分性と必要性を分けて検討する。

◀ $(a + 3)x - 2 = 0$ の解が

$$x = -\frac{5}{2}$$

のとき、①は $x = -\frac{5}{2}$ を重解にもつ。

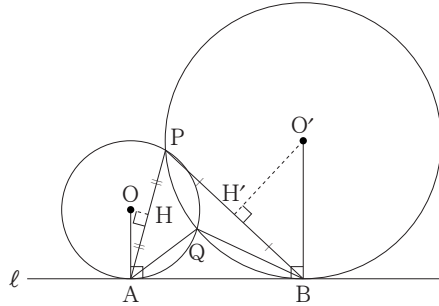
◀ $0 \cdot x - 2 = 0$

$$a = -\frac{19}{5}$$

のときなので、 $a = -3$ であることは、①の解が $x = -\frac{5}{2}$ だけであるための必要条件ではない。

したがって、 $a = -3$ であることは、①の解が $x = -\frac{5}{2}$ だけであるための十分条件であるが、必要条件ではない。 \Rightarrow ①

[2]
(1)



$\angle PAB = \alpha$ とおく。円 O の中心 O から直線 PA に引いた垂線と直線 PA との交点を H とすると

$$\angle OHA = 90^\circ$$

であり、 $\angle OAB = 90^\circ$ であるから

$$\angle OAH = \angle OAB - \angle PAB = 90^\circ - \alpha$$

である。よって、 $\triangle OAH$ に着目すると

$$\begin{aligned} \angle AOH &= 180^\circ - \angle OHA - \angle OAH \\ &= 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \alpha) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

である。直角三角形 OAH に着目して

$$\sin \alpha = \frac{AH}{OA}$$

より

$$AH = OA \sin \alpha = 2 \sin \alpha$$

であるから

$$PA = 2AH = 4 \sin \alpha \quad \dots\dots\dots ④$$

である。

$\angle PBA = \beta$ とおく。同様に、円 O' の中心 O' から直線 PB に引いた垂線と直線 PB との交点を H' とすると

$$\angle BO'H' = \beta$$

であるから、直角三角形 O'BH' に着目すると

$$\sin \beta = \frac{BH'}{O'B}$$

よって

$$BH' = O'B \sin \beta = 4 \sin \beta$$

であるから

$$PB = 2BH' = 8 \sin \beta \quad \dots\dots\dots ⑤$$

であることもわかる。

また、 $\triangle PAB$ の外接円の半径を R_1 とおくと、正弦定理により

$$\frac{PA}{\sin \beta} = \frac{PB}{\sin \alpha} = 2R_1 \quad \dots\dots\dots ⑥ \quad \Rightarrow ①, ②$$

◀ ①の解が $x = -\frac{5}{2}$ だけであるときの a の値は $a = -3$ 以外に $a = -\frac{19}{5}$ の場合があるので、 $a = -3$ は必要条件ではない。

◀ OA は円 O の半径より $OA = 2$

◀ 線分 PA は円 O の弦で、 $OH \perp PA$ より、点 H は線分 PA を二等分する。よって、 $PA = 2AH$ となる。

◀ $\triangle O'BH'$ に対して、 $\triangle OAH$ と同様に考えればよい。

◀ O'B は円 O' の半径より $O'B = 4$

◀ 線分 PB は円 O' の弦で、 $O'H' \perp PB$ より、点 H' は線分 PB を二等分する。よって、 $PB = 2BH'$ となる。

が成り立つので

$$PA \sin \alpha = PB \sin \beta$$

である。この式に、①と②を代入することにより

$$4 \sin^2 \alpha = 8 \sin^2 \beta$$

$$\sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \beta$$

α, β は $\triangle PAB$ の内角であり、 $\sin \alpha > 0, \sin \beta > 0$ であるから

$$\sin \alpha = \sqrt{2} \sin \beta$$

この式と②より

$$PB = 8 \sin \beta = 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha = 4\sqrt{2} \sin \alpha$$

①より、 $4 \sin \alpha = PA$ であるから

$$PB = \sqrt{2} \cdot 4 \sin \alpha = \sqrt{2} PA$$

となることがわかる。さらに、③より

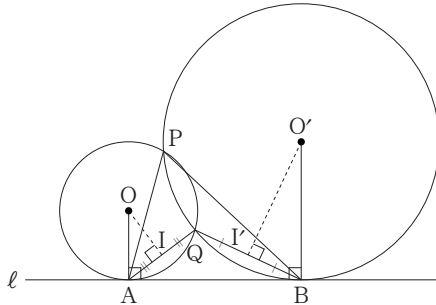
$$2R_1 = \frac{PB}{\sin \alpha} = \frac{4\sqrt{2} \sin \alpha}{\sin \alpha} = 4\sqrt{2}$$

したがって

$$R_1 = 2\sqrt{2}$$

が得られる。

(2)



$\angle QAB = \alpha'$, $\angle QBA = \beta'$ とおき、 $\triangle PAB$, $\triangle QAB$ の外接円の半径をそれぞれ R_1, R_2 とおく。また、円 O の中心 O から直線 QA に引いた垂線と直線 QA との交点を I , 円 O' の中心 O' から直線 QB に引いた垂線と直線 QB との交点を Y とする。(1)と同様にして

$$QA = 2AI = 4 \sin \alpha', \quad QB = 2BY = 8 \sin \beta'$$

であり、 $\triangle QAB$ において正弦定理より

$$\frac{QA}{\sin \beta'} = \frac{QB}{\sin \alpha'} = 2R_2$$

よって、(1)と同様にして、これらの式より

$$\sin \alpha' = \sqrt{2} \sin \beta'$$

$$QB = 4\sqrt{2} \sin \alpha'$$

$$2R_2 = \frac{QB}{\sin \alpha'} = \frac{4\sqrt{2} \sin \alpha'}{\sin \alpha'} = 4\sqrt{2}$$

したがって

$$R_2 = 2\sqrt{2}$$

となるから、 $R_1 = R_2$ である。

さらに、 $\triangle PAB$, $\triangle QAB$ において、それぞれ正弦定理より

$$\frac{AB}{\sin \angle APB} = 2R_1, \quad \frac{AB}{\sin \angle AQB} = 2R_2$$

であり、 $R_1 = R_2$ より

$$\sin \angle APB = \sin \angle AQB$$

◀ $PB = 4\sqrt{2} \sin \alpha$

◀問題文から(1)を参考にすればよいことがわかる。そこで、 $\triangle PAB$ について考察したことが、 $\triangle QAB$ にも活かせるか、と考える。図からも、同じ議論ができそうなのがうかがえる。

◀ $QA \sin \alpha' = QB \sin \beta'$

$$QA = 4 \sin \alpha'$$

$$QB = 8 \sin \beta'$$

より

$$4 \sin^2 \alpha' = 8 \sin^2 \beta'$$

これと、 α', β' は $\triangle QAB$ の内角であることから

$$\sin \alpha' = \sqrt{2} \sin \beta'$$

⇨ ①

◀この式と $\angle APB < \angle AQB$ より、 $\angle APB$ は鋭角、 $\angle AQB$ は鈍角である。また

$$\angle AQB = 180^\circ - \angle APB$$

が成り立つ。

⇨ ①

であることもわかる。

(3) (1)より $R_1 = 2\sqrt{2}$, (2)より $\frac{AB}{\sin \angle APB} = 2R_1$ なので, $AB = 2\sqrt{7}$ とするとき

$$\frac{2\sqrt{7}}{\sin \angle APB} = 2 \cdot 2\sqrt{2}$$

これより

$$\sin \angle APB = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

である。また, $\angle APB$ は鋭角より, $\cos \angle APB > 0$ であるから

$$\cos \angle APB = \sqrt{1 - \sin^2 \angle APB} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$\triangle PAB$ について余弦定理より

$$AB^2 = PA^2 + PB^2 - 2PA \cdot PB \cos \angle APB$$

(1)より, $PB = \sqrt{2}PA$ であり, $AB = 2\sqrt{7}$ とあわせると

$$(2\sqrt{7})^2 = PA^2 + (\sqrt{2}PA)^2 - 2PA \cdot \sqrt{2}PA \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$28 = PA^2 + 2PA^2 - PA^2$$

$$PA^2 = 14$$

これと $PA > 0$ より

$$PA = \sqrt{14}$$

である。また

$$\cos \angle AQB = \cos(180^\circ - \angle APB) = -\cos \angle APB = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

であり, $QB = \sqrt{2}QA$ であるから, $\triangle QAB$ について同様に余弦定理より

$$AB^2 = QA^2 + QB^2 - 2QA \cdot QB \cos \angle AQB$$

$$(2\sqrt{7})^2 = QA^2 + (\sqrt{2}QA)^2 - 2QA \cdot \sqrt{2}QA \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$28 = QA^2 + 2QA^2 + QA^2$$

$$QA^2 = 7$$

$QA > 0$ より

$$QA = \sqrt{7}$$

であることがわかる。

◀ $PB = \sqrt{2}PA$ と同様に, $QB = \sqrt{2}QA$ を示すことができる。

第2問

[1]

(1) C_1 をグラフにもつ2次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とすると, 仮定1より, C_1 は点 $(0, 1)$ を通るから

$$1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

より

$$c = 1$$

また, C_1 は, 点 $P_1\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$, 点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を通るから

$$\begin{cases} 0 = a \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 1 \\ 0 = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{2} + 1 \end{cases}$$

これを解くと

$$a = -\frac{4}{5}, \quad b = -\frac{8}{5}$$

となるから, C_1 をグラフにもつ2次関数は

◀ C_1 は2点

$$P_1\left(-\frac{5}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

を通るから, 2次関数の式は

$$y = a\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

とおける(「研究」参照)。これが点 $(0, 1)$ を通るので

$$1 = a \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a = -\frac{4}{5}$$

これより

$$y = -\frac{4}{5}\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y = -\frac{4}{5}x^2 - \frac{8}{5}x + 1$$

を得てもよい。

$$y = -\frac{4}{5}x^2 - \frac{8}{5}x + 1$$

である。変形すると

$$y = -\frac{4}{5}(x+1)^2 + \frac{9}{5}$$

となるから、 C_1 の頂点の x 座標は -1 、 y 座標は $\frac{9}{5}$ である。

また、 C_1 と C_3 について、 P_1 と P_3 、 $(\frac{1}{2}, 0)$ と $(-\frac{1}{2}, 0)$ はそれぞれ y 軸について対称な位置にあり、点 $(0, 1)$ は y 軸上にあることから、 C_1 と C_3 は y 軸に関して対称な位置にある放物線である。これより、 C_3 の頂点は C_1 の頂点と y 軸について対称な位置にあるので、 C_3 の頂点の x 座標は 1 、 y 座標は $\frac{9}{5}$ である。

仮定2より、 C_2 は C_1 の頂点と C_3 の頂点を通るので、それらの対称性から C_2 の軸は y 軸である。これより、 C_2 をグラフにもつ2次関数の式は

$$y = a'x^2 + q'$$

とおける。さらに、 C_2 は点 $(-1, \frac{9}{5})$ と点 $P_2(\frac{3}{2}, 0)$ を通るから

$$\begin{cases} \frac{9}{5} = a' \cdot (-1)^2 + q' \\ 0 = a' \cdot (\frac{3}{2})^2 + q' \end{cases}$$

これを解くと

$$a' = -\frac{36}{25}, \quad q' = \frac{81}{25}$$

となるから、 C_2 を表す2次関数の式は $y = -\frac{36}{25}x^2 + \frac{81}{25}$ となり、頂点の y 座標は $\frac{81}{25}$ である。

したがって、大きな噴水の高さは $\frac{81}{25}$ 、小さな噴水の高さは $\frac{9}{5}$ つまり $\frac{45}{25}$

であるから、高さはおよそ2倍である。

⇒ ①

(2) 仮定2'より、 C_2' の軸は y 軸であり、 C_2' の頂点の y 座標は5であるから、 C_2' をグラフにもつ2次関数は

$$y = a''x^2 + 5 \quad (a'' < 0)$$

とおける。また、仮定2'より、 C_1 の頂点 $(-1, \frac{9}{5})$ を通るから

$$\begin{aligned} \frac{9}{5} &= a'' + 5 \\ a'' &= -\frac{16}{5} \end{aligned}$$

よって、 C_2' をグラフにもつ2次関数の式は $y = -\frac{16}{5}x^2 + 5$ となり、 $y = 0$ のとき

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{16}{5}x^2 + 5 \\ x &= \pm \frac{5}{4} \end{aligned}$$

点 P_2' は x 軸の正の部分の点より、点 P_2' の x 座標は $\frac{5}{4}$ である。ここで、点 P_2 の x 座標は $\frac{3}{2}$ であるから、 $\frac{3}{2} > \frac{5}{4}$ であり

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$$

より、点 P_2' は点 P_2 より $\frac{1}{4}$ だけ点 P_1 の方にある。

⇒ ②

研究

2次関数を表す式を決定する問題では、式のおき方がポイントになることが

◀対称性を活用して手早く解きたい。

◀ここでも対称性を使う。なお、 C_2 をグラフにもつ2次関数を $y = a'x^2 + b'x + c'$ とおくと、3点 $(-1, \frac{9}{5})$ 、 $(1, \frac{9}{5})$ 、 $(\frac{3}{2}, 0)$ を通ることから

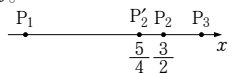
$$\begin{cases} \frac{9}{5} = a' - b' + c' \\ \frac{9}{5} = a' + b' + c' \\ 0 = \frac{9}{4}a' + \frac{3}{2}b' + c' \end{cases}$$

が得られるので、これを解いてもよい。

◀ $81 \div 45 = 1.8$ より、およそ2倍である。

◀ C_1 の頂点と C_3 の頂点を通るところは仮定2と同じなので、 C_2 と同様に、 C_2' の軸も y 軸である。

◀下の図のような位置関係になる。



ある。 $y = ax^2 + bx + c$ 以外のおき方として代表的なものは

(あ) 2次関数のグラフの頂点の座標が (p, q) のとき

$$\rightarrow y = a(x - p)^2 + q$$

(い) 2次関数のグラフが x 軸と $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ で交わるとき

$$\rightarrow y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

があり、与えられた条件の特徴を踏まえて、最適なおき方を選びたい。

[2]

(1)(i) (a)について、図1より、外国人宿泊者数が100を超え、かつ日本人宿泊者数が2500を超えるのは(210, 2900), (680, 5200)付近にある2点に対応する都道府県である。よって、該当する都道府県数は2であるから、正しい。

(b)について、図1より、日本人の宿泊者数が外国人宿泊者数の10倍未満であるのは図中の破線部分より下部にある(680, 5200)付近にある点に対応する都道府県である。よって、該当する都道府県数は1であるから、正しい。 \rightarrow ⑥

(ii) データの大きさは47であるから



12番目の値が第1四分位数、24番目の値が中央値、36番目の値が第3四分位数となる。よって、四分位範囲は、P36の数からP12の数を引いたものであるから

$$1251 - 351 = 900$$

となる。したがって

$$351 - 1.5 \times 900 = -999, \quad 1251 + 1.5 \times 900 = 2601$$

より、外れ値となるのは日本人宿泊者数の値が2601以上となる都道府県である。よって、令和4年の外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の両方で外れ値となる都道府県は、P45, P46, P47であるから、数は3である。

(2) $z_i - \bar{z} = (x_i - \bar{x}) + (y_i - \bar{y})$ のとき

$$\begin{aligned} (z_i - \bar{z})^2 &= \{(x_i - \bar{x}) + (y_i - \bar{y})\}^2 \\ &= (x_i - \bar{x})^2 + 2(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + (y_i - \bar{y})^2 \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} s_z^2 &= \frac{1}{47} \left\{ (z_1 - \bar{z})^2 + (z_2 - \bar{z})^2 + \dots + (z_{47} - \bar{z})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{47} \left\{ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{47} - \bar{x})^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{47} \left\{ (y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_{47} - \bar{y})^2 \right\} \\ &\quad + 2 \cdot \frac{1}{47} \left\{ (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots \right. \\ &\quad \left. + (x_{47} - \bar{x})(y_{47} - \bar{y}) \right\} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} s_x^2 &= \frac{1}{47} \left\{ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{47} - \bar{x})^2 \right\} \\ s_y^2 &= \frac{1}{47} \left\{ (y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_{47} - \bar{y})^2 \right\} \\ s_{xy} &= \frac{1}{47} \left\{ (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \dots + (x_{47} - \bar{x})(y_{47} - \bar{y}) \right\} \end{aligned}$$

より

◀図1では横軸に外国人宿泊者数を、縦軸に日本人宿泊者数をとっているため、原点を通り傾きが a の直線上に点があるとき、その直線上の点に対応する都道府県では日本人宿泊者数が外国人宿泊者数の a 倍になっている。散布図に傾きが10の直線が引いてあるので、これを活用しよう。

◀日本人宿泊者数が負になることはないため、値が小さい方の外れ値は存在しない。

$$s_z^2 = s_x^2 + s_y^2 + 2s_{xy} \quad \Leftrightarrow \textcircled{4}$$

となる。また、 x と y に正の相関があるとき、 $s_{xy} > 0$ なので、 $s_z^2 = s_x^2 + s_y^2 + 2s_{xy}$ であることより

$$s_z^2 > s_x^2 + s_y^2 \quad \Leftrightarrow \textcircled{0}$$

(3) 実験結果より、35 枚の硬貨のうち 23 枚以上が表となった割合は

$$2.4 + 0.9 + 0.5 + 0.4 + 0.1 = 4.3(\%)$$

である。これを 35 人のうち 23 人以上が「キャンペーン A の方がよい」と回答する確率とみなすと、5% 未満である。

これより、立てた方針に従うと、「キャンペーン A の方がよい」と回答する割合と、「キャンペーン B の方がよい」と回答する割合は等しいという仮説は誤っていると判断する。したがって、今回のアンケート結果からは、キャンペーン A の方がよいと思っている人が多いといえる。 $\Leftrightarrow \textcircled{0}, \textcircled{0}$

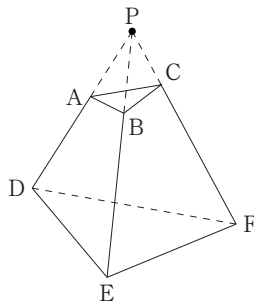
◀ x の標準偏差を s_x 、 y の標準偏差 s_y とすると、 x と y の相関係数は

$$\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

である。 x と y に正の相関があることから相関係数は正であり、 s_x と s_y は定義よりともに正なので、 s_{xy} もまた正である。

第3問

(1)



問題文の条件より、点 P は直線 AD 上にあり、直線 AD は平面 ABED と平面 ACFD との交線であるから、点 P は平面 ACFD 上にあることがわかる。 $\Leftrightarrow \textcircled{2}$

同様に、点 P は直線 BE 上にあり、直線 BE は平面 ABED と平面 BCFE との交線であるから、点 P は平面 BCFE 上にあることがわかる。 $\Leftrightarrow \textcircled{3}$

平面 ACFD と平面 BCFE との交線は直線 CF であるから、点 P は直線 CF 上にもあることがわかる。したがって、3 直線 AD、BE、CF は点 P で交わる。

(2) $AB = BC = CA = 3$, $AD = 7$, $BE = 11$, $CF = 17$, $DE = 9$ のときを考える。

(i) 4 点 A, B, E, D を通る円を考えると、

$\triangle PAB \sim \triangle PED$ であり、その相似比は

$$AB : DE = 3 : 9 = 1 : 3$$

である。したがって、 $PA : PE = 1 : 3$ より

$$3PA = PE$$

また

$$PE = PB + BE = PB + 11$$

であるから

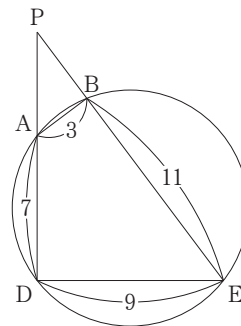
$$3PA = PB + 11 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

同様に、 $PB : PD = 1 : 3$ より

$$3PB = PD$$

であり

$$PD = PA + AD = PA + 7$$



◀ 二つの平面が交わってできる直線をその二つの平面の交線という。

◀ 四角形 ABED は円に内接する四角形であるから
 $\angle PAB = \angle PED$
 $\angle PBA = \angle PDE$
 が成り立ち
 $\triangle PAB \sim \triangle PED$
 となる。なお、この相似から
 $PA : PB = PE : PD$
 がわかり、方べきの定理
 $PA \cdot PD = PB \cdot PE$
 が導かれる。

であるから

$$3PB = PA + 7 \quad \text{.....} \textcircled{2}$$

が成り立つ。

よって、①、②をPA, PBの連立方程式とみて解くと

$$PA = 5, PB = 4$$

となる。

(ii) 4点B, C, F, Eを通る円を考えると、方べきの定理より

$$PB \cdot PE = PC \cdot PF$$

また

$$PF = PC + CF = PC + 17$$

より

$$4 \cdot (11 + 4) = PC \cdot (PC + 17)$$

$$PC^2 + 17PC - 60 = 0$$

$$(PC + 20)(PC - 3) = 0$$

$PC > 0$ より

$$PC = 3$$

となる。したがって、 $\triangle PBC \sim \triangle PFE$ より

$$PB : PF = BC : FE$$

であり

$$PF = PC + CF = 3 + 17 = 20$$

であるから

$$4 : 20 = 3 : EF$$

$$EF = 15$$

となる。同様に、 $\triangle PAC \sim \triangle PFD$ より

$$PA : PF = CA : DF$$

$$5 : 20 = 3 : DF$$

$$DF = 12$$

となる。

(iii) $\angle ADE$, $\angle ADF$, $\angle EDF$ の大きさについて考える。

$\triangle PDE$ について

$$DE : PD : PE$$

$$= 9 : 12 : 15$$

$$= 3 : 4 : 5$$

より、 $\angle PDE$, すなわち、 $\angle ADE$ は直角である。

$\triangle PDF$ について、 $\triangle PDF$ は $DP = DF$ の二等辺三角形なので $\angle PDF$ が直角ならば

$$PD : DF : PF = 1 : 1 : \sqrt{2}$$

となるはずだが、実際は

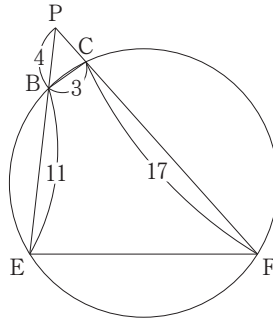
$$PD : DF : PF = 12 : 12 : 20 = 3 : 3 : 5$$

である。よって、 $\angle PDF$, すなわち、 $\angle ADF$ は直角ではない。

$\triangle DEF$ について

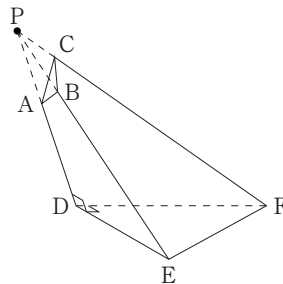
$$DE : DF : EF = 9 : 12 : 15 = 3 : 4 : 5$$

より、 $\angle EDF$ は直角である。



◀(i)と同様に、円に内接する四角形BCFEに着目すると、 $\triangle PBC \sim \triangle PFE$ を示すことができる。

◀(i)と同様に、円に内接する四角形ACFDに着目すると、 $\triangle PAC \sim \triangle PFD$ を示すことができる。



◀有名な直角三角形の辺の比は覚えておくとうい。

$$1 : 1 : \sqrt{2}$$

$$1 : 2 : \sqrt{3}$$

以外では

$$3 : 4 : 5$$

$$5 : 12 : 13$$

$$8 : 15 : 17$$

あたりは押さえておこう。

◀余弦定理を活用してもよい。

$$PF^2 = 20^2 = 400$$

$$PD^2 + DF^2 = 12^2 + 12^2$$

$$= 144 + 144$$

$$= 288$$

よって、 $PF^2 > PD^2 + DF^2$ となり、 $\angle PDF$ は鈍角である。

(a)について、平面 ABED と平面 DEF の交線が直線 DE であり、 $PD \perp DE$ 、 $DF \perp DE$ であるから、平面 ABED と平面 DEF のなす角は $\angle PDF$ に等しい。 $\angle PDF$ は直角ではないから、(a)は偽である。

(b)について $DE \perp PD$ 、 $DE \perp DF$ より、平面 ACFD 上の平行でない 2 直線 PD、DF に対して直線 DE は垂直に交わる。よって、直線 DE は平面 ACFD に垂直なので、(b)は真である。

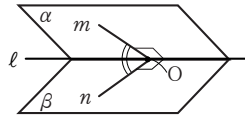
(c)について、直線 DE は平面 ACFD に垂直であり、直線 AC は平面 ACFD 上の直線なので、直線 AC と直線 DE は垂直である。よって、(c)は真である。

⇨ ④

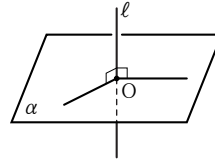
研究

(2)(iii)で問われた「2 平面のなす角」「直線と平面の垂直」について確認しておこう。

2 平面 α 、 β が交わるとき、その交線 ℓ 上の点 O を通り ℓ に垂直な直線 m 、 n をそれぞれ α 、 β 上に引くとき、この 2 直線 m 、 n のなす角を 2 平面 α 、 β のなす角という。



また、直線 ℓ と平面 α が点 O で交わるとき、直線 ℓ が、点 O を通る α 上の異なる平行でない 2 直線と垂直ならば、 ℓ は点 O を通る α 上のすべての直線と垂直、つまり $\ell \perp \alpha$ である。



第 4 問

(1) 1 回目または 2 回目に当たりが出るのは

- ・ 1 回目に当たりが出る
- ・ 1 回目に当たりが出ず、かつ 2 回目に当たりが出る

場合であるから、1 回目または 2 回目に当たりが出る確率は

$$\frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

であり、1 回目、2 回目ともに当たりが出ない確率は

$$1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

である。また、少なくとも 1 回は当たりが出るのは

- ・ 1 回目に当たりが出る
- ・ 1 回目に当たりが出ず、かつ 2 回目に当たりが出る
- ・ 1 回目、2 回目ともに当たりが出ず、かつ 3 回目に当たりが出る

のいずれかであるから、少なくとも 1 回は当たりが出る確率は

$$\frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

であり、1 回も当たりが出ない確率は

$$1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

である。

別解

1 回目に当たりが出ない確率は、1 回目に当たりが出る確率が $\frac{3}{16}$ なので

$$1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16} \dots\dots\dots ①$$

◀ 当たりが出たら、以降はくじを引かないことに注意しよう。

◀ 二つの事象は排反である。

◀ 余事象の確率を利用した。「1 回目、2 回目ともに当たりが出ない」の余事象は「1 回目または 2 回目に当たりが出る」である。

◀ 「1 回も当たりが出ない」の余事象「少なくとも 1 回は当たりが出る」を考察する。

◀ 三つの事象は排反である。

◀ 余事象の確率。

また、1回目、2回目とも当たりが出ない確率は、①から1回目に当たりが出ず、かつ2回目に当たりが出る確率 $\frac{1}{8}$ を引いて

$$\frac{13}{16} - \frac{1}{8} = \frac{11}{16} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

そして、1回も当たりが出ない確率は、②から1回目、2回目ともに当たりが出ず、かつ3回目に当たりが出る確率 $\frac{1}{16}$ を引いて

$$\frac{11}{16} - \frac{1}{16} = \frac{5}{8}$$

(2)(i) 数量 X に関する確率をまとめると、(1)より、次の表ようになる。

X	0	1200	計
確率	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	1

よって、数量 X の期待値は

$$0 \cdot \frac{5}{8} + 1200 \cdot \frac{3}{8} = 450$$

である。

(ii) (i)で求めた主催者が負担する金額 X 円の期待値 450 円は、参加料の金額 500 円未満である。したがって、主催者は参加料 500 円という設定について妥当であると判断する。 ⇨ ④, ⑤

(3)(i) $a = 170$ と設定した場合の数量 Y に関する確率をまとめると、(1)より、次の表ようになる。

Y	170	340	510	計
確率	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{11}{16}$	1

よって、数量 Y の期待値は

$$170 \cdot \frac{3}{16} + 340 \cdot \frac{1}{8} + 510 \cdot \frac{11}{16} = 425$$

である。

(ii) (2)(i)で求めた X 円の期待値 450 円は、 $a = 170$ と設定した場合の支払方法 2 で参加者が支払う参加料 Y 円の期待値 425 円以上である。したがって、主催者はくじ引き料 170 円という設定について妥当ではないと判断する。

⇨ ①, ②

また、数量 Y に関する確率をまとめると、(1)より、次の表ようになる。

Y	a	$2a$	$3a$	計
確率	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{11}{16}$	1

よって、数量 Y の期待値は

$$a \cdot \frac{3}{16} + 2a \cdot \frac{1}{8} + 3a \cdot \frac{11}{16} = \frac{5}{2}a$$

となる。主催者がくじ引き料の設定が妥当であると判断するのは、主催者が負担する金額 X 円の期待値 450 円が、支払方法 2 で参加者が支払う参加料 Y 円の期待値 $\frac{5}{2}a$ 円未満であるときなので

$$450 < \frac{5}{2}a$$

$$a > 180$$

これより、主催者がくじ引き料の設定が妥当であると判断するのは $a > 180$ のときであり、妥当ではないと判断するのは $a \leq 180$ のときである。

◀期待値の定義にしたがって計算する。

◀一般の a の場合の考察をする。 $a = 170$ と設定した場合の考察と同じように考えればよい。