第 1 問

(1)(i)　$\alpha=\theta+\frac{\pi}{6}$，$\beta=2\theta$ であるから，$\alpha=\beta$ を満たす θ は

$$\theta+\frac{\pi}{6}=2\theta$$

$$\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

このとき

$$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

◀ $2\theta=\frac{\pi}{3}$

であるから，① より

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2\theta=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

◀ $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ii)　α の動径と C との交点が P，β の動径と C との交点が Q であるから

P$(\cos\alpha, \sin\alpha)$，Q$(\cos\beta, \sin\beta)$

◀一般角における三角関数の定義より。

よって

$\sin\alpha=\sin\beta$　……………………………………………………… ②

が成り立つとき，つねに **点 P の y 座標と，点 Q の y 座標が等しい。**

⇨ ②

(iii)　$\theta\neq\frac{\pi}{6}$ とすると，$\alpha\neq\beta$ である。

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{\pi}{6}\leqq\alpha\leqq\frac{2}{3}\pi,\quad 0\leqq\beta\leqq\pi$$

である。

◀ $\alpha=\theta+\frac{\pi}{6}$，$\beta=2\theta$
2 点 P，Q は $y\geqq 0$ の部分にあることがわかる。

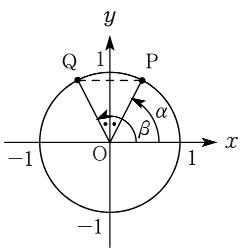
② が成り立つとき，(ii) と $\alpha\neq\beta$ より，2 点 P，Q は y 軸に関して対称であるから，x 座標の平均値は 0 である。したがって，α と β の平均値は

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\pi}{2}$$

すなわち

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=\pi}$$

⇨ ②



◀左の図のように $\alpha<\beta$ である。$\beta<\alpha$ となるのは
$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6}$
のときで
$0\leqq 2\theta<\theta+\frac{\pi}{6}$
より
$0\leqq\beta<\alpha<\frac{\pi}{3}\left(<\frac{\pi}{2}\right)$
となり，2 点 P，Q は y 軸に関して対称にならない。

を満たす。したがって

$$\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+2\theta=\pi$$

$$3\theta=\frac{5}{6}\pi$$

$$\boldsymbol{\theta=\frac{5}{18}\pi}$$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき

$$\frac{2}{3}\pi<\alpha<\frac{7}{6}\pi,\quad \pi<\beta<2\pi$$

である。

◀ $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のときと同様に考える。

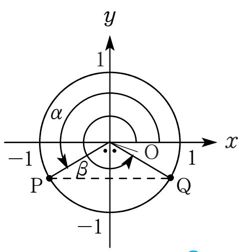
◀点 P は $x<0$ の部分，点 Q は $y<0$ の部分にあることがわかる。

② が成り立つとき，α と β の平均値は

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}\pi$$

すなわち

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=3\pi}$$



⇨ ⑥

を満たす。したがって

$$\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+2\theta=3\pi$$

$$3\theta=\frac{17}{6}\pi$$

$$\boldsymbol{\theta=\frac{17}{18}\pi}$$

以上より，$0\leqq\theta<\pi$ のとき，① の解は

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{18}\pi,\ \frac{17}{18}\pi$$

(2)　$0\leqq\theta<\pi$ のとき，方程式

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\cos 2\theta \quad \cdots\cdots ③$$

の解を求める。以下，(1)と同様に，$\alpha=\theta+\dfrac{\pi}{6}$，$\beta=2\theta$ とおく。

◀(1)と同様に考える。

α と β が等しければ，$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ は等しい。このとき，(1)(i)より

$$\theta=\frac{\pi}{6}$$

次に，$\theta\fallingdotseq\dfrac{\pi}{6}$ とすると，$\alpha\fallingdotseq\beta$ である。

(1)(ii)と同様に 2 点 P，Q を定義すると，③ が成り立つとき，つねに点 P の x 座標と，点 Q の x 座標が等しい。

◀ $\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{Q}(\cos\beta,\ \sin\beta)$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{\pi}{6}\leqq\alpha\leqq\frac{2}{3}\pi,\quad 0\leqq\beta\leqq\pi$$

である。

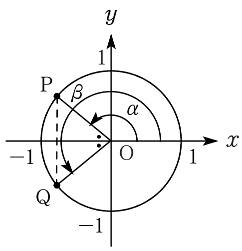
③ が成り立つとき，$\alpha\fallingdotseq\beta$ より，2 点 P，Q は x 軸に関して対称であるが，点 P は $y>0$ の部分にあり，点 Q は $y\geqq0$ の部分にあるので，x 軸に関して対称になることはない。したがって，③ は解をもたない。

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき

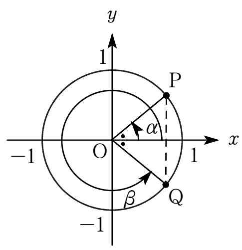
$$\frac{2}{3}\pi<\alpha<\frac{7}{6}\pi,\quad \pi<\beta<2\pi$$

より，③ が成り立つとき，α と β の平均値は

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\pi$$



◀点 P は $x<0$ の部分，点 Q は $y<0$ の部分にある。2 点 P，Q の位置から，次の図のようになることはない。



すなわち

$$\alpha+\beta=2\pi$$

を満たす。したがって

$$\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+2\theta=2\pi$$

$$3\theta=\frac{11}{6}\pi$$

$$\theta=\frac{11}{18}\pi$$

以上より，$0\leqq\theta<\pi$ のとき，③の解は

$$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{18}\pi}$$

第２問

(1)　水草 A の量は，1 日ごとに r 倍になるから，3 日ごとに r^3 倍になる。

観測結果から，3 日目の水草 A の量は 0 日目の量の 1.32 倍になると考えると

$$\boldsymbol{r^3 = 1.32} \qquad ⇨ ③$$

を満たす。この式の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} r^3 = \log_{10} 1.32$$
$$3\log_{10} r = \log_{10} 1.32$$

より

$$\log_{10} r = \frac{1}{3}\log_{10} 1.32$$

ここで，常用対数表より

$$\boldsymbol{\log_{10} 1.32 = 0.1206} \qquad ⇨ ①$$

◀常用対数表において，1.3 の行と 2 の列が交わったところの値を読む。

であるから

$$\boldsymbol{\log_{10} r} = \frac{1}{3}\cdot 0.1206 = \boldsymbol{0.0402}$$

(2)　水草 A の量は，1 日ごとに r 倍になるから，14 日目には $\boldsymbol{r^{14}}$ 倍になる。

⇨ ③

0 日目の水草の量を a % としたとき，14 日目の水草の量は $(a\times r^{14})$ % であり，これがちょうど 60 % になる実数 a を考えるから

$$\boldsymbol{a\times r^{14} = 60} \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。①の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} ar^{14} = \log_{10} 60$$
$$\log_{10} a + \log_{10} r^{14} = \log_{10} 10 + \log_{10} 6$$
$$\log_{10} a + 14\log_{10} r = 1 + \log_{10} 6$$

$\log_{10} r = 0.0402$，$\log_{10} 6 = 0.7782$ であることを用いると

$$\log_{10} a + 14\cdot 0.0402 = 1 + 0.7782$$
$$\log_{10} a + 0.5628 = 1.7782$$
$$\boldsymbol{\log_{10} a = 1.2154} \qquad ⇨ ③$$

そして

◀以下，a の値を調べる。

$$\log_{10} a = 1 + 0.2154$$
$$= \log_{10} 10 + 0.2154$$

◀常用対数表に 1 以上の値はないので，1 と 1 未満の値の和に分解する。

であるから，常用対数表より

$$\log_{10} 10 + 0.2148 < \log_{10} 10 + 0.2154 < \log_{10} 10 + 0.2175$$
$$\log_{10} 10 + \log_{10} 1.64 < \log_{10} a < \log_{10} 10 + \log_{10} 1.65$$
$$\log_{10} 16.4 < \log_{10} a < \log_{10} 16.5$$

◀常用対数表に 0.2154 ぴったりの値はないので，0.2154 に近い値に注目して不等式を立てる。

底 10 は 1 より大きいから

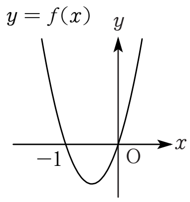
$$16.4 < a < 16.5$$

よって，a 以下で最大の整数は **16** である。

第３問

(1)　$F(x)=2x^3+3x^2$ のとき

$$\boldsymbol{f(x)}=F'(x)$$
$$=\boldsymbol{6x^2+6x}$$
$$=6x(x+1)$$



したがって，$x=-1$ の前後で $F'(x)(=f(x))$ の符号は正から負に変わるから，$F(x)$ は $\boldsymbol{x=-1}$ で極大値をとる。

また，$f(x)=G'(x)$ であるから

$$\boldsymbol{G(x)}=\int f(x)\,dx$$
$$=F(x)+C\ （C \text{ は積分定数}）$$
$$=\boldsymbol{2x^3+3x^2+C}$$

$G'(x)\,(=f(x))$ の符号は，$x=0$ の前後で負から正に変わり，$x=-1$ の前後で正から負に変わるから，$G(x)$ は，$\boldsymbol{x=0}$ で極小値をとり，$x=-1$ で極大値をとる。

$G(x)$ が $x=k$ で極大値 0 をとることから

$$k=-1$$

であり

$$G(-1)=2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2+C$$
$$=C+1$$

より

$$C+1=0$$

よって

$$\boldsymbol{C=-1}$$

(2)(i)　$F(x)$ が $x=0$ で極小値をとることから

◀$x=0$ の前後で $F(x)$ が減少の状態から増加の状態に変化するということ。

$$F'(0)=0$$

すなわち

$$\boldsymbol{f(0)=0}$$

であり，$x=0$ の前後で $f(x)\,(=F'(x))$ の符号は **負から正に変わる**。

⇨ ⓪

さらに，$G(x)$ が $x=k$ で極大値をとることから

◀$x=k$ の前後で $G(x)$ が増加の状態から減少の状態に変化するということ。

$$G'(k)=0$$

すなわち

$$\boldsymbol{f(k)=0}$$

であり，$x=k$ の前後で $f(x)\,(=G'(x))$ の符号は **正から負に変わる**。

⇨ ①

x		0		k	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	↘	0	↗	極大値	↘

したがって，$F'(x)=f(x)$ であることに注意すると，$F(x)$ は $x=0$ で極小値をとり，$x=k\,(>0)$ で極大値をとることがわかる。仮定より，$F(x)$ の極小値が 0 であることを合わせると，$y=F(x)$ のグラフの概形は ③ であることがわかる。

(ii)　$F'(x) = f(x)$ および $F(0) = 0$ より

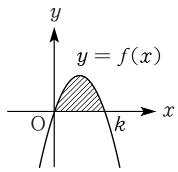
$$\boldsymbol{F(x)} = F(x) - F(0)$$
$$= \int_0^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f(t)\,dt}$$
⇨ ③，⓪

このことと(i)の考察により，$F(x)$ の極大値は

$$F(k) = \int_0^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{f(t)\,dt} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$
⇨ ②，⓪

と表される。

$f(x)$ は2次関数であり，$k > 0$ のとき，(i)の考察より，$y = f(x)$ のグラフは x 軸と2点 $(0,\ 0)$，$(k,\ 0)$ で交わる上に凸の放物線である。したがって，①の右辺は，$\boldsymbol{y = f(x)}$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の**面積**と等しい。 ⇨ ⓪，⓪



さらに，$F'(x) = G'(x) = f(x)$ より，D を定数として

$$G(x) = F(x) + D$$

◀$F(x)$，$G(x)$ はともに $f(x)$ の原始関数である。

と表すことができるので

$$G(k) = F(k) + D$$
$$0 = \int_0^k f(t)\,dt + D$$
$$D = -\int_0^k f(t)\,dt$$

◀$G(x)$ は $x = k$ で極大値0をとる。

よって，$G(x)$ の極小値は

$$G(0) = F(0) - \int_0^k f(t)\,dt$$
$$= -\int_0^k f(t)\,dt$$
$$= -F(k)$$

◀$G(x)$ は $x = 0$ で極小値をとる。

◀$F(x)$ は $x = 0$ で極小値0をとる。

以上より，$F(x)$ の極大値は，$G(x)$ の**極小値の -1 倍**と等しいことがわかる。

⇨ ②

◀$F(x)$ は $x = k$ で極大値をとる。

第４問

(1)　直線 $x=2$ と直線 $y=3x$ の交点は $(2,\ 6)$ であるから，$x=2$ 上の格子点で T の内部にあるものは

$$(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ \cdots,\ (2,\ 5)$$

の 5 個である。つまり，$\boldsymbol{a_2=5}$ である。

◀点 $(2,\ 0)$，$(2,\ 6)$ は T の境界にあるため，内部にはない。

　直線 $x=3$ と直線 $y=3x$ の交点は $(3,\ 9)$ であるから，$x=3$ 上の格子点で T の内部にあるものは

$$(3,\ 1),\ (3,\ 2),\ \cdots,\ (3,\ 8)$$

の 8 個である。つまり，$\boldsymbol{a_3=8}$ である。

◀点 $(3,\ 0)$，$(3,\ 9)$ は T の境界にあるため，内部にはない。

　同様に，$1\leqq n\leqq 20$ のとき，直線 $x=n$ と直線 $y=3x$ の交点は $(n,\ 3n)$ であるから，直線 $x=n$ 上の格子点で T の内部にあるものは

$$(n,\ 1),\ (n,\ 2),\ \cdots,\ (n,\ 3n-1)$$

の $(3n-1)$ 個である。つまり，$a_n=3n-1$ であり，数列 $\{a_n\}$ は公差が **3** の等差数列である。　⇨ 0，0

◀点 $(n,\ 0)$，$(n,\ 3n)$ は T の境界にあるため，内部にはない。

　よって，T の内部にある格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{20}a_k=\frac{20\cdot\{2+(3\cdot 20-1)\}}{2}=10\cdot 61=\mathbf{610}$$

◀初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和は $\dfrac{n(a+l)}{2}$

(2)　直線 $x=k$ が U の内部にある格子点を通るのは

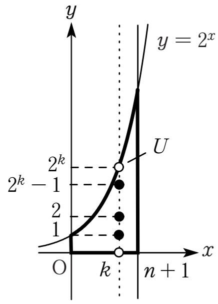
$$1\leqq k\leqq n$$

のときである。

　このとき，直線 $x=k$ と関数 $y=2^x$ のグラフの交点は $(k,\ 2^k)$ であるから，直線 $x=k$ 上の格子点で U の内部にあるものは

$$(k,\ 1),\ (k,\ 2),\ \cdots,\ (k,\ 2^k-1)$$

であり，個数は $\boldsymbol{2^k-1}$ である。　⇨ 7



◀点 $(k,\ 0)$，$(k,\ 2^k)$ は U の境界にあるため，内部にはない。

　よって，U の内部にある格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n$$　⇨ 1

$$=2(2^n-1)-n$$

$$=\boldsymbol{2^{n+1}-n-2}$$　⇨ 7

◀初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和は，$r\neq 1$ のとき $\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

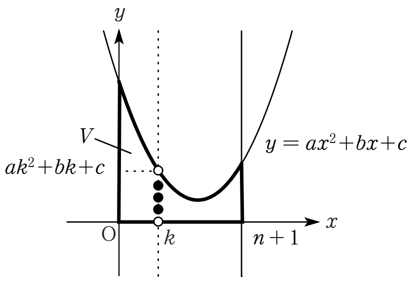
(3)　$a>0$，$b^2-4ac<0$ であるから，放物線 $y=ax^2+bx+c$ は下に凸で，x 軸と共有点をもたない曲線である。

◀b^2-4ac は x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式である。

　直線 $x=k$ が V の内部にある格子点を通るのは

$$1\leqq k\leqq n$$

のときである。



　このとき，直線 $x=k$ と放物線 $y=ax^2+bx+c$ の交点は $(k,\ ak^2+bk+c)$ であるから，直線 $x=k$ 上の格子点で V の内部にあるものは

$$(k,\ 1),\ (k,\ 2),\ \cdots,\ (k,\ ak^2+bk+c-1)$$

であり，個数は $ak^2+bk+c-1$ である。

◀ 点 $(k,\ 0)$，$(k,\ ak^2+bk+c)$ は V の境界にあるため，内部にはない。

　よって，V の内部にある格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+c-1)$$

$$= \frac{an(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{bn(n+1)}{2} + (c-1)n$$

$$= \frac{n}{6}\{a(n+1)(2n+1) + 3b(n+1) + 6(c-1)\}$$

$$= \frac{n}{6}\{2an^2 + 3(a+b)n + a + 3b + 6c - 6)\}$$

$$= \frac{an^3}{3} + \frac{(a+b)n^2}{2} + \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c - 1\right)n$$

である。これがすべての自然数 n に対して

$$\frac{an^3}{3} + \frac{(a+b)n^2}{2} + \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c - 1\right)n = n^3$$

となるのは

$$\frac{a}{3} = 1,\quad \frac{a+b}{2} = 0,\quad \frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c - 1 = 0$$

これらを連立して解くと

$$\boldsymbol{a = 3,\ b = -3,\ c = 2}$$

◀ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

◀n についての恒等式とみる。

◀このとき，a，b，c は整数で，$a > 0$，$b^2 - 4ac < 0$ を満たす。

第５問

(1)　確率変数 X は正規分布 $N(110,\ 20^2)$ に従うから，確率変数 $Z = \frac{X-110}{20}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。今年収穫されるレモンから無作為に抽出した 1 個が L サイズである確率 $P(110 \leqq X < 140)$ は

$$P(110 \leqq X < 140) = P(110 \leqq X \leqq 140)$$

であることに注意すると

$$110 \leqq X \leqq 140$$

のとき

$$\frac{110-110}{20} \leqq \frac{X-110}{20} \leqq \frac{140-110}{20}$$

すなわち

$$0 \leqq Z \leqq 1.5$$

より，$P(0 \leqq Z \leqq 1.5)$ と等しい。よって，正規分布表より

$$P(110 \leqq X < 140) = \mathbf{0.4332}$$

である。次に，確率変数 Y は二項分布 $B(200000,\ 0.4332)$ に従うから，Y の平均（期待値）は

$$200000 \times 0.4332 = \mathbf{86640}$$　⇨ ④

となる。

◀正規分布表において，1.5 の行と 0.00 の列が交わったところの値を読む。

◀一般に，確率変数 Y が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき
平均 $E(Y) = np$
分散 $V(Y) = np(1-p)$

(2)　標本平均 $\overline{W} = \frac{1}{n}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n)$ について，平均 $E\left(\overline{W}\right)$ は

$$E\left(\overline{W}\right) = E\left(\frac{1}{n}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n)\right)$$

$$= \frac{1}{n}E(W_1 + W_2 + \cdots + W_n)$$

$$= \frac{1}{n}\{E(W_1) + E(W_2) + \cdots + E(W_n)\}$$

母平均は mg であるから

$$E(W_1) = E(W_2) = \cdots = E(W_n) = m$$

したがって

$$E\left(\overline{W}\right) = \frac{1}{n} \cdot mn = m$$

また，分散 $V\left(\overline{W}\right)$ は，確率変数 W_1，W_2，$\cdots$，W_n が互いに独立であるから

$$V\left(\overline{W}\right) = V\left(\frac{1}{n}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n)\right)$$

◀一般に，確率変数 X，定数 a に対して，
$E(aX) = aE(X)$

◀一般に，確率変数 X，Y に対して
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
（和の期待値は期待値の和）

$$= \frac{1}{n^2} V(W_1 + W_2 + \cdots + W_n)$$

$$= \frac{1}{n^2} \{V(W_1) + V(W_2) + \cdots + V(W_n)\}$$

母標準偏差は σg であるから，母分散は σ^2 であり

$$V(W_1) = V(W_2) = \cdots = V(W_n) = \sigma^2$$

したがって

$$V(\overline{W}) = \frac{1}{n^2} \cdot \sigma^2 n = \frac{\sigma^2}{n}$$

以上より，標本の大きさ n が十分に大きいとき，標本平均 $\overline{W}$ は近似的に正規分布 $\boldsymbol{N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)}$ に従う。 ⇨ ⑥

また，確率変数 $Z' = \dfrac{\overline{W} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。ここで

$$P(-z_0 \leqq Z' \leqq z_0) = 0.95$$

を満たす正の実数 z_0 を求める。

$$P(0 \leqq Z' \leqq z_0) = \frac{0.95}{2} = 0.4750$$

であるから，正規分布表より

$$z_0 = 1.96$$

したがって

$$P\left(-1.96 \leqq \frac{\overline{W} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqq 1.96\right) = 0.95$$

$$P\left(\overline{W} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{W} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

であるから，m に対する信頼度 95% の信頼区間を $A \leqq m \leqq B$ と表すと

$$A = \overline{W} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad B = \overline{W} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

よって，信頼区間の幅は

$$\boldsymbol{B - A} = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \boldsymbol{\frac{3.92\sigma}{\sqrt{n}}}$$ ⇨ ⑤

となる。したがって，母標準偏差 σ を 20g とすると，信頼区間の幅を 4 g 以下にするための n の条件は

$$\frac{3.92 \times 20}{\sqrt{n}} \leqq 4 \quad \cdots\cdots ①$$

$$(3.92 \times 20)^2 \leqq 16n$$

$$n \geqq \frac{(3.92 \times 20)^2}{16} = \frac{(3.92 \times 5)^2 \cdot 4^2}{16} = 19.6^2 = 384.16$$

であるから，①を満たす最小の自然数 n を n_0 とすると

$$\boldsymbol{n_0 = 385}$$

であり，m に対する信頼度 95% の信頼区間の幅を 4g 以下にするために必要な標本の大きさ n のうち，最小のものは 385 であることがわかる。

(3) 統計的に検証したい仮説（対立仮説）は「$\boldsymbol{m < 110}$」である。 ⇨ ⓪

帰無仮説「$m = 110$」が正しいと仮定すると，(2)の標本平均 $\overline{W}$ について

$$平均\ E(\overline{W}) = 110,\qquad 分散\ V(\overline{W}) = \frac{20^2}{400} = 1$$

である。標本の大きさ 400 は十分に大きいから，$\overline{W}$ は近似的に正規分布 $\boldsymbol{N(110,\ 1)}$ に従う。 ⇨ ⑤

このとき

◀一般に，確率変数 X，定数 a に対して
$V(aX) = a^2 V(X)$

◀一般に，確率変数 X，Y が互いに独立であるとき
$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

◀標準正規分布曲線は，直線 $z = 0$ に関して対称より
$P(0 \leqq Z' \leqq z_0)$
$= P(-z_0 \leqq Z' \leqq 0)$

◀正規分布表において，0.4750 を探す。

◀標本の大きさを 400，母標準偏差を 20 g としている。

$$P\left(\overline{W} \leqq 108.2\right) = P\left(\frac{\overline{W}-110}{1} \leqq -1.8\right)$$
$$= P\left(\frac{\overline{W}-110}{1} \geqq 1.8\right)$$
$$= P\left(\frac{\overline{W}-110}{1} \geqq 0\right) - P\left(0 \leqq \frac{\overline{W}-110}{1} \leqq 1.8\right)$$
$$= 0.5 - P\left(0 \leqq \frac{\overline{W}-110}{1} \leqq 1.8\right)$$
$$= 0.5 - 0.4641 = \mathbf{0.0359}$$

この値をパーセント表示すると 3.59% であり，有意水準 5% より**小さいから，帰無仮説は棄却される**。 ⇨ ①

　したがって，有意水準 5% で今年収穫されるレモンの重さの母平均は 110 g より軽いと**判断できる**。 ⇨ ⓪

◀確率変数 $\frac{\overline{W}-110}{1}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

◀確率変数 Z'' が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき
$P(Z'' \leqq -1.8)$
$= P(Z'' \geqq 1.8)$

◀正規分布表において，$z_0 = 1.8$ を探す。

◀有意水準よりも確率の小さい事象は，ほとんど起こり得ない事象と考える。

第６問

(1)　球面 S の半径は 1 であるから，点 C が S 上にあるとき

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 = \mathbf{1}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (x,\ y,\ z)$ であるから，これをベクトルの成分を用いて表すと

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

　△ABC が正三角形であるとすると，△OAC と △OAB は合同であるから

$$\angle\mathrm{AOC} = \angle\mathrm{AOB}$$

であり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\ (=1)$ より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\cos\angle\mathrm{AOC} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{OC}} = \overrightarrow{\mathbf{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{OB}}$$ ⇨ ④

◀$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = ●$ の形をつくることが目標。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (a,\ \sqrt{1-a^2},\ 0)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をベクトルの成分を用いて表すと

$$1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z = 1\cdot a + 0\cdot\sqrt{1-a^2} + 0\cdot 0$$
$$\boldsymbol{x = a} \quad \cdots\cdots ②$$ ⇨ ⓪

　同様に，△OBC と △OAB は合同であるから

$$\angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{AOB}$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

これをベクトルの成分を用いて表すと

$$a\cdot x + \sqrt{1-a^2}\cdot y + 0\cdot z = 1\cdot a + 0\cdot\sqrt{1-a^2} + 0\cdot 0$$
$$\boldsymbol{ax + \sqrt{1-a^2}y = a} \quad \cdots\cdots ③$$ ⇨ ⓪，⑤

　逆に，実数 x，y，z が①，②，③を満たすとき，C $(x,\ y,\ z)$ は S 上の点であり，△ABC は正三角形になっている。

(2)(i)　$a = \frac{3}{5}$ のとき，②，③より

$$x = \frac{3}{5},\quad \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = \frac{3}{5}$$

　これらを連立して解くと

$$\boldsymbol{x = \frac{3}{5},\quad y = \frac{3}{10}}$$

　このとき①より

$$\frac{9}{25}+\frac{9}{100}+z^2=1$$
$$z^2=\frac{11}{20}$$
となり，これを満たす実数 z は**ちょうど二つある**。 ⇨ ②

◀ $z^2>0$ より。

したがって，△ABC が正三角形となる S 上の点 C はちょうど二つある。

◀ $(x,\ y,\ z)$ の組がちょうど二つある。

(ii) $a=-\frac{3}{5}$ のとき，②，③より

◀(i)と同様に考える。

$$x=-\frac{3}{5},\quad -\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=-\frac{3}{5}$$
これらを連立して解くと
$$x=-\frac{3}{5},\ y=-\frac{6}{5}$$
このとき①は
$$\frac{9}{25}+\frac{36}{25}+z^2=1$$
$$z^2=-\frac{4}{5}$$
となるが，これを満たす実数 z はない。

◀ $z^2<0$ より。

したがって，△ABC が正三角形となる S 上の点 C は**ないことがわかる**。 ⇨ ⓪

◀ $(x,\ y,\ z)$ の組はない。

(3) 実数 $x,\ y,\ z$ が ①，②，③を満たすとする。②，③を連立して解くと
$$x=a,\ y=\frac{a(1-a)}{\sqrt{1-a^2}}$$

◀ $a \neq \pm 1$

このとき，①から
$$\begin{aligned}\boldsymbol{z^2}&=1-x^2-y^2=1-a^2-\frac{a^2(1-a)^2}{1-a^2}\\&=\frac{(1-a^2)^2-a^2(1-a)^2}{1-a^2}\\&=\frac{(1+a)^2(1-a)^2-a^2(1-a)^2}{(1+a)(1-a)}\\&=\frac{(1-a)^2\{(1+a)^2-a^2\}}{(1+a)(1-a)}\\&=\boldsymbol{\frac{(1+2a)(1-a)}{1+a}}\end{aligned}$$
⇨ ③

さらに，$z^2\geqq 0$，$1+a>0$ であるから
$$(1+2a)(1-a)\geqq 0 \quad \cdots\cdots ④$$
逆に，④ のとき，①，②，③を満たす実数 $x,\ y,\ z$ があることがわかる。
以上のことから
$$④ かつ\ -1<a<1$$
が，△ABC が正三角形となる S 上の点 C があるための必要十分条件である。
④ を解くと
$$(2a+1)(a-1)\leqq 0$$
$$-\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$$
よって，求める必要十分条件は
$$\boldsymbol{-\frac{1}{2}\leqq a<1}$$
⇨ ④

第７問

(1)　$\alpha=3+2i$，$\beta=7$，$\gamma=7+10i$ のとき

$$\boldsymbol{\gamma-\alpha}=(7+10i)-(3+2i)=\mathbf{4+8}\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{\beta-\alpha}=7-(3+2i)=\mathbf{4-2}\boldsymbol{i}$$

であるから

$$\frac{\boldsymbol{\gamma-\alpha}}{\boldsymbol{\beta-\alpha}}=\frac{4+8i}{4-2i}=\frac{2(1+2i)}{2-i}=\frac{2(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

◀分母を有理化するために，$2-i$ と共役な複素数 $2+i$ を分母・分子にかける。

$$=\frac{2(2+5i-2)}{4+1}=\mathbf{2}\boldsymbol{i}$$　⇨ ③

◀ $i^2=-1$

であり，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=2i$ の偏角は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$ である。　⇨ ④

◀ $2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(2)　$w=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ とおく。直線 AB と直線 AC が垂直に交わるのは，w の偏角が $\dfrac{\pi}{2}$ または $\dfrac{3}{2}\pi$ のときである。このとき，w は

純虚数（実部が 0 である虚数）　⇨ ②

◀偏角が $\frac{\pi}{2}$ または $\frac{3}{2}\pi$ の複素数は純虚数である。

したがって

$$\overline{w}=-w$$

$$\boldsymbol{w+\overline{w}=0}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$　⇨ ⓪

逆に，$w\neq 0$ に注意すると，$w+\overline{w}=0$ のとき，w は純虚数であるので，直線 AB と直線 AC が垂直に交わる。

(3)(i)　$\alpha=z$，$\beta=2$，$\gamma=\dfrac{4}{z}$ のとき

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\frac{4}{z}-z}{2-z}=1+\frac{2}{z}$$

①より，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は

$$\left(1+\frac{2}{z}\right)+\overline{\left(1+\frac{2}{z}\right)}=0$$

$$1+\frac{2}{z}+1+\frac{2}{\overline{z}}=0$$

$$2+\frac{2}{z}+\frac{2}{\overline{z}}=0$$

◀両辺に $z\overline{z}$ をかける。

$$z\overline{z}+z+\overline{z}=0$$

$$(z+1)\left(\overline{z}+1\right)=1$$

$$(z+1)\overline{(z+1)}=1$$

$$|z+1|^2=1$$

したがって

$$\boldsymbol{|z+1|=1}$$　⇨ ⑥

これを満たす複素数 z が複素数平面上で描く図形は，点 -1 を中心とする半径 1 の円であり，$z\neq0$，2，-2 に注意して，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるような点 z 全体を複素数平面上に図示すると ⓪ である。

◀一般に，$r>0$ のとき $|z-a|=r$ は点 a を中心とする半径 r の円を表す。

(ii)　(i)の α，β，γ をそれぞれ -1 倍した複素数 $\alpha'=-\alpha$，$\beta'=-\beta$，$\gamma'=-\gamma$ について

$$\frac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'}=\frac{-\gamma-(-\alpha)}{-\beta-(-\alpha)}=\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$

が成り立つ。したがって，A′(α')，B′(β')，C′(γ') について，直線 A′B′ と直線 A′C′ が垂直になるような点 z 全体は，直線 AB と直線 AC が垂直になるような点 z 全体と等しい。よって，複素数平面上に図示すると ⓪ である。

(iii)　(i)の α，β，γ における z を $-z$ に置き換えた複素数 α''，β''，γ'' について，

(i)の考察より，$\dfrac{\gamma''-\alpha''}{\beta''-\alpha''}$ が純虚数となるとき

$$|-z+1|=1$$

すなわち

$$|z-1|=1$$

これを満たす複素数 z が複素数平面上で描く図形は，点 1 を中心とする半径 1 の円であり，$z \neq 0$，2，-2 に注意して，直線 A″B″ と直線 A″C″ が垂直になるような点 z 全体を複素数平面上に図示すると 1 である。

◀(i)で求めた z についての必要十分条件において，z を $-z$ に置き換えた。