

第 1 問

(1)(i)  $x^n$  を  $x-2$  で割ったときの商を  $Q(x)$ , 余りを  $k$  とおくと

$$x^n = (x-2)Q(x) + k \quad \dots\dots\dots \textcircled{1} \quad \Rightarrow \textcircled{4}$$

となる。① の両辺の  $x$  に 2 を代入すると

$$2^n = 0 \cdot Q(2) + k$$

$$k = 2^n \quad \Rightarrow \textcircled{5}$$

であることがわかる。

(ii)  $x^n$  を  $2x-1$  で割ったときの商を  $Q'(x)$ , 余りを  $k'$  とおくと

$$x^n = (2x-1)Q'(x) + k' \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

となる。② の両辺の  $x$  に  $\frac{1}{2}$  を代入すると

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \cdot Q'\left(\frac{1}{2}\right) + k'$$

$$k' = \frac{1}{2^n} \quad \Rightarrow \textcircled{8}$$

であることがわかる。

(2)(i)  $(X+2)^n$  を展開すると

$$(X+2)^n = {}_n C_0 \cdot X^n + {}_n C_1 \cdot X^{n-1} \cdot 2 + {}_n C_2 \cdot X^{n-2} \cdot 2^2 + \dots$$

$$+ {}_n C_{n-2} \cdot X^2 \cdot 2^{n-2} + {}_n C_{n-1} \cdot X \cdot 2^{n-1} + {}_n C_n \cdot 2^n$$

であるから,  $X$  の項の係数は

$${}_n C_{n-1} \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^{n-1} \quad \Rightarrow \textcircled{4}$$

定数項は

$${}_n C_n \cdot 2^n = 2^n \quad \Rightarrow \textcircled{0}$$

となる。これら以外の項は  $X^2$  で割り切れるので,  $(X+2)^n$  は

$$A(X) = {}_n C_0 \cdot X^{n-2} + {}_n C_1 \cdot 2X^{n-3} + \dots + {}_n C_{n-3} \cdot 2^{n-3}X + {}_n C_{n-2} \cdot 2^{n-2}$$

を用いて

$$(X+2)^n = A(X) \cdot X^2 + n \cdot 2^{n-1}X + 2^n$$

と表すことができる。  $X = x-2$  より

$$x^n = (X+2)^n = A(x-2) \cdot (x-2)^2 + n \cdot 2^{n-1}(x-2) + 2^n$$

であるから,  $x^n$  を  $(x-2)^2$  で割ったときの余り  $R(x)$  は

$$R(x) = n \cdot 2^{n-1}(x-2) + 2^n$$

$$= n \cdot 2^{n-1}x + (-n+1) \cdot 2^n \quad \Rightarrow \textcircled{4}, \textcircled{3}$$

(ii)  $Y = 2x-1$  とおく。このとき

$$x^n = \left(\frac{Y+1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}(Y+1)^n$$

である。  $(Y+1)^n$  を展開すると

$$(Y+1)^n = {}_n C_0 \cdot Y^n + {}_n C_1 \cdot Y^{n-1} \cdot 1 + {}_n C_2 \cdot Y^{n-2} \cdot 1^2 + \dots$$

$$+ {}_n C_{n-2} \cdot Y^2 \cdot 1^{n-2} + {}_n C_{n-1} \cdot Y \cdot 1^{n-1} + {}_n C_n \cdot 1^n$$

であるから,  $\frac{1}{2^n}(Y+1)^n$  を展開すると,  $Y$  の項の係数は

$$\frac{1}{2^n} \cdot {}_n C_{n-1} \cdot 1^{n-1} = \frac{n}{2^n}$$

定数項は

$$\frac{1}{2^n} \cdot {}_n C_n \cdot 1^n = \frac{1}{2^n}$$

となる。これら以外の項は  $Y^2$  で割り切れるので,  $\frac{1}{2^n}(Y+1)^n$  は

◀一般に, 多項式  $A(x)$  を多項式  $B(x)$  で割ったときの商を  $Q(x)$ , 余りを  $R(x)$  とおくと  $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$  ただし,  $R(x) = 0$  または  $(Q(x)$  の次数)  $>$   $(R(x)$  の次数) である。

◀(i)と同様に考える。

◀二項定理より。

◀(i)と同様に考える。

◀二項定理より。

$$B(Y) = {}_nC_0 \cdot Y^{n-2} + {}_nC_1 \cdot Y^{n-3} + \dots + {}_nC_{n-3} \cdot Y + {}_nC_{n-2}$$

を用いて

$$\frac{1}{2^n}(Y+1)^n = \frac{B(Y)}{2^n} \cdot Y^2 + \frac{n}{2^n}Y + \frac{1}{2^n}$$

と表すことができる。  $Y = 2x - 1$  より

$$x^n = \frac{1}{2^n}(Y+1)^n = \frac{B(2x-1)}{2^n} \cdot (2x-1)^2 + \frac{n}{2^n}(2x-1) + \frac{1}{2^n}$$

であるから、 $x^n$  を  $(2x-1)^2$  で割ったときの余りは

$$\frac{n}{2^n}(2x-1) + \frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}x + \frac{-n+1}{2^n} \quad \Leftrightarrow \textcircled{8}, \textcircled{7}$$

である。

## 第2問

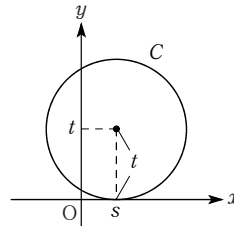
(1)  $C$  の方程式は

$$x^2 - 2sx + y^2 - 2ty + s^2 = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$(x-s)^2 + (y-t)^2 = t^2$$

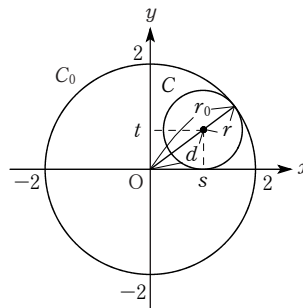
と変形できるので、 $C$  は、中心  $(s, t)$ 、半径  $t$  の円である。  
 $\Leftrightarrow \textcircled{3}, \textcircled{6}, \textcircled{6}$

また、中心の  $y$  座標と半径が等しいので、 $C$  は  $s$  や  $t$  の値によらず  $x$  軸と接している。  
 $\Leftrightarrow \textcircled{0}$



◀  $0 < s < t$  のときの図。

(2)(i)  $C_0: x^2 + y^2 = 4$  は、中心が原点、半径 2 の円である。 $C$  の中心の  $x$  座標  $s$  は  $-2 < s < 2$  を満たし、 $C$  は  $x$  軸と接しているため、 $C$  と  $C_0$  が接するとき、 $C$  は  $C_0$  の内部（境界を含む）に存在し、 $C_0$  と  $C$  は内接していることがわかる。  
 $\Leftrightarrow \textcircled{1}$



そして、右の図より、 $C_0$  の中心と  $C$  の中心との間の距離  $d$  を、 $C_0$  の半径  $r_0$  と  $C$  の半径  $r$  で表すと

$$d = r_0 - r \quad \Leftrightarrow \textcircled{2}$$

となる。これを  $s, t$  で表すと

$$\sqrt{s^2 + t^2} = 2 - t$$

であり、 $0 < t < 2$  より、この等式の両辺は正であるから 2 乗して

$$s^2 + t^2 = (2-t)^2$$

$$s^2 + t^2 = t^2 - 4t + 4$$

したがって、 $t$  を  $s$  で表すと

$$t = \frac{4-s^2}{4} \quad \Leftrightarrow \textcircled{1}$$

となる。

(ii) (i) より、 $s, t$  は

$$t = \frac{4-s^2}{4} = -\frac{s^2}{4} + 1 \quad (\text{ただし、} -2 < s < 2)$$

を満たすので、 $C$  の中心  $(s, t)$  は、 $xy$  平面上において放物線  $y = -\frac{x^2}{4} + 1$  の  $-2 < x < 2$  の部分を描く。よって、概形を実線で表したものは  $\textcircled{2}$  である。

◀ 2 円が内接しているとき、中心間の距離は半径の差の絶対値に等しい。

◀  $t$  は  $C$  の半径であり、 $C_0$  の半径より小さい。

◀ 頂点が  $(0, 1)$  で、上に凸の放物線である。

(3) (1)より  $C_1$  の半径は  $t$  であり、(2)(ii)より  $t$  の最大値は 1 である。 $t = 1$  のとき、 $C_1$  は中心  $(0, 1)$ 、半径 1 の円であり、直線  $x = 1$  に接する。したがって

$$k = 1$$

◀  $C_1$  は  $\textcircled{0}$  が表す円である。

のとき、 $C_1$  の半径は最大値 1 をとることがわかる。

このとき、 $C_2$  の中心  $(s, t)$  の  $s, t$  は

$$\begin{cases} s-1=t \\ t=\frac{4-s^2}{4} \end{cases}$$

を満たす。2 式から  $t$  を消去して

$$s-1=\frac{4-s^2}{4}$$

$$4(s-1)=4-s^2$$

$$s^2+4s-8=0$$

この  $s$  の 2 次方程式を解いて

$$\begin{aligned} s &= -2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \cdot (-8)} \\ &= -2 \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

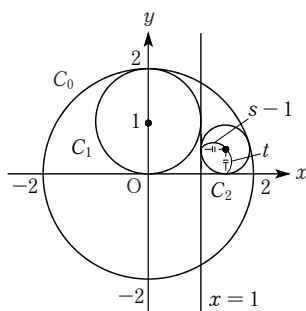
$1 < s < 2$  より

$$s = 2\sqrt{3} - 2$$

であり

$$t = (2\sqrt{3} - 2) - 1 = 2\sqrt{3} - 3$$

すなわち、 $C_2$  の中心の座標は  $(2\sqrt{3} - 2, 2\sqrt{3} - 3)$  である。



◀  $C_2$  も①が表す円である。

◀ 円  $C_2$  の半径に注目する。

◀ (2)(i)より。

◀  $C_2$  の中心  $(s, t)$  は不等式  $x > 1$  の表す領域にあるので、 $s > 1$  である。

◀  $t = s - 1$

### 第3問

(1)  $F(x) = \int_0^x t(t-2)dt$  より

$$F'(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$$

であり、 $F(x)$  の増減は次の表のようになる。

|         |   |    |   |    |   |
|---------|---|----|---|----|---|
| $x$     |   | 0  |   | 2  |   |
| $F'(x)$ | + | 0  | - | 0  | + |
| $F(x)$  | ↗ | 極大 | ↘ | 極小 | ↗ |

よって、 $x = 0$  のとき、 $F(x)$  は極大値

$$F(0) = \int_0^0 t(t-2)dt = 0$$

をとる。また、 $x = 2$  のとき、 $F(x)$  は極小値

$$F(2) = \int_0^2 t(t-2)dt = -\frac{(2-0)^3}{6} = -\frac{4}{3}$$

をとる。

(2)(i)  $0 \leq t \leq 2$  のとき、 $t(t-2) \leq 0$  より

$$|t(t-2)| = -t(t-2)$$

⇒ ②

$$t \leq 0, 2 \leq t \text{ のとき、} t(t-2) \geq 0 \text{ より}$$

$$|t(t-2)| = t(t-2)$$

⇒ ①

である。

(ii) (i)により、 $G(x)$  を(1)の  $F(x)$  を用いて表すと、 $0 \leq x \leq 2$  のとき

$$G(x) = \int_0^x |t(t-2)|dt$$

$$= \int_0^x \{-t(t-2)\}dt$$

⇒ ②

$$= -F(x)$$

⇒ ⑨

$2 \leq x$  のとき

◀  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  ( $a$  は定数) のとき  $F'(x) = f(x)$

◀  $\int_a^a f(t)dt = 0$  ( $a$  は定数)

$$\begin{aligned} \leftarrow \int_{\alpha}^{\beta} (t-\alpha)(t-\beta)dt \\ = -\frac{(\beta-\alpha)^3}{6} \end{aligned}$$

を用いた。

$$\int_0^2 (t^2-2t)dt$$

$$= \left[ \frac{t^3}{3} - t^2 \right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

と計算することもできる。

◀  $0 \leq t \leq x$  ( $\leq 2$ ) のとき  $|t(t-2)| = -t(t-2)$

$$\leftarrow F(x) = \int_0^x t(t-2)dt$$

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int_0^x |t(t-2)| dt \\
&= \int_0^2 \{-t(t-2)\} dt + \int_2^x t(t-2) dt && \Leftrightarrow \textcircled{2} \\
&= -F(2) + \left\{ \int_0^x t(t-2) dt - \int_0^2 t(t-2) dt \right\} \\
&= -F(2) + F(x) - F(2) \\
&= F(x) - 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \\
&= F(x) + \frac{8}{3} && \Leftrightarrow \textcircled{2}
\end{aligned}$$

である。

(iii)  $0 \leq x \leq 2$  のとき, (2)(ii)より

$$G(x) = -F(x)$$

である。したがって, (1)より  $G(x)$  は  $0 \leq x \leq 2$  の区間で単調に増加する 3 次関数であり

$$G(0) = -F(0) = 0, \quad G(2) = -F(2) = \frac{4}{3}$$

である。

$2 \leq x$  のとき, (2)(iii)より

$$G(x) = F(x) + \frac{8}{3}$$

である。したがって, (1)より,  $G(x)$  は  $2 \leq x$  の区間で単調に増加する 3 次関数であり

$$G(2) = F(2) + \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

である。

よって,  $y = G(x)$  のグラフの概形は  $\textcircled{2}$  である。

(3)  $\alpha \leq t \leq \beta$  のとき,  $(t-\alpha)(t-\beta) \leq 0$  より

$$|(t-\alpha)(t-\beta)| = -(t-\alpha)(t-\beta)$$

$t \leq \alpha, \beta \leq t$  のとき,  $(t-\alpha)(t-\beta) \geq 0$  より

$$|(t-\alpha)(t-\beta)| = (t-\alpha)(t-\beta)$$

である。

$\alpha \leq x \leq \beta$  のとき

$$\begin{aligned}
H(x) &= \int_\alpha^x |(t-\alpha)(t-\beta)| dt - \int_\alpha^x (t-\alpha)(t-\beta) dt \\
&= \int_\alpha^x \{-t(t-\alpha)(t-\beta)\} dt - \int_\alpha^x (t-\alpha)(t-\beta) dt \\
&= -2 \int_\alpha^x (t-\alpha)(t-\beta) dt
\end{aligned}$$

であり,  $H(x)$  の値は  $x$  の値によって変化する。

$\beta \leq x$  のとき

$$\begin{aligned}
H(x) &= \int_\alpha^x |(t-\alpha)(t-\beta)| dt - \int_\alpha^x (t-\alpha)(t-\beta) dt \\
&= \int_\alpha^\beta \{-t(t-\alpha)(t-\beta)\} dt + \int_\beta^x (t-\alpha)(t-\beta) dt \\
&\quad - \left\{ \int_\alpha^\beta (t-\alpha)(t-\beta) dt + \int_\beta^x (t-\alpha)(t-\beta) dt \right\} \\
&= -2 \int_\alpha^\beta (t-\alpha)(t-\beta) dt
\end{aligned}$$

であり,  $H(x)$  の値は  $x$  の値によらず一定である。

$$\begin{aligned}
\blacktriangleleft & 0 \leq t \leq 2 \text{ のとき} \\
& |t(t-2)| = -t(t-2) \\
& 2 \leq t \leq x \text{ のとき} \\
& |t(t-2)| = t(t-2) \\
\blacktriangleleft & \int_b^c f(x) dx \\
& = \int_a^c f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \\
\blacktriangleleft & (1) \text{より} \\
& F(2) = -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

$$\blacktriangleleft F'(x) = x^2 - 2x \text{ より,} \\
F(x) \text{ は 3 次関数である。} \\
F(x) \text{ は } 0 \leq x \leq 2 \text{ の区間} \\
\text{で単調に減少し, } x=0 \text{ のと} \\
\text{き極大値 } 0, x=2 \text{ のとき極} \\
\text{小値 } -\frac{4}{3} \text{ をとる。}$$

$$\blacktriangleleft F(2) = -\frac{4}{3}$$

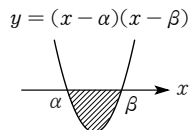
$$\begin{aligned}
\blacktriangleleft & G(x) \text{ を求めて, 概形を考え} \\
& \text{てもよい。} F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 \\
& \text{より, } 0 \leq x \leq 2 \text{ のとき} \\
& G(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 \\
& 2 \leq x \text{ のとき} \\
& G(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{8}{3} \\
& \text{である。}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\blacktriangleleft & \alpha \leq t \leq x (\leq \beta) \text{ のとき} \\
& |(t-\alpha)(t-\beta)| \\
& = -(t-\alpha)(t-\beta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\blacktriangleleft & \alpha \leq t \leq \beta \text{ のとき} \\
& |(t-\alpha)(t-\beta)| \\
& = -(t-\alpha)(t-\beta) \\
& \beta \leq t \leq x \text{ のとき} \\
& |(t-\alpha)(t-\beta)| \\
& = (t-\alpha)(t-\beta)
\end{aligned}$$

よって、 $H(x)$ の値が $x$ の値によらず一定となるような $x$ の値の範囲は $\beta \leq x$ である。  $\Leftrightarrow$  ③

$-\int_{\alpha}^{\beta} (t-\alpha)(t-\beta)dt$ は関数 $y = (x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフと $x$ 軸で囲まれた図形の面積に等しいから、 $\beta \leq x$ における $H(x)$ の値 $-2\int_{\alpha}^{\beta} (t-\alpha)(t-\beta)dt$ は関数 $y = (x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフと $x$ 軸で囲まれた図形の面積の2倍に等しい。  $\Leftrightarrow$  ②



## 第4問

- (1)  $a_1 = -3$ ,  $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$ より、数列 $\{a_n\}$ は初項 $-3$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから、 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = -3 \left( \frac{-1}{2} \right)^{n-1}$$

である。

$n$ が奇数であれば、 $n-1$ は偶数より

$$\left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} > 0$$

であるから、 $a_n < 0$ が成り立つ。  $\Leftrightarrow$  ④

また、 $n$ が偶数であれば、 $n-1$ は奇数より

$$\left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} = -\left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} < 0$$

であるから、 $a_n > 0$ が成り立つ。  $\Leftrightarrow$  ②

- (2) 与えられた漸化式

$$b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n - 9 \quad \dots\dots\dots ②$$

に対して

$$\alpha = -\frac{1}{2}\alpha - 9 \quad \dots\dots\dots ③$$

を考え、②-③とすると

$$b_{n+1} - \alpha = -\frac{1}{2}(b_n - \alpha)$$

となる。③を解くと

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\alpha &= -9 \\ \alpha &= -6 \end{aligned}$$

であるから

$$b_{n+1} + 6 = -\frac{1}{2}(b_n + 6)$$

よって、数列 $\{b_n + 6\}$ は初項 $-3 + 6 = 3$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから、一般項は

$$b_n + 6 = 3 \left( \frac{-1}{2} \right)^{n-1}$$

したがって、 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = 3 \left( \frac{-1}{2} \right)^{n-1} - 6$$

である。

$n$ が奇数であれば、 $n-1$ は偶数より

$$\left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} > 0$$

であり、 $\frac{1}{2} < 1$ より、 $n-1=0$ のとき、 $\left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ は最大値1をとる。

◀初項 $a$ 、公比 $r$ の等比数列の一般項は  
 $ar^{n-1}$

◀与えられた漸化式の $b_{n+1}$ と $b_n$ を $\alpha$ に置き換えた式を考える。

$n$ が偶数であれば、 $n-1$ は奇数より

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0$$

よって、すべての自然数  $n$  について  $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq A$  が成り立つような最小の実数  $A$  は、 $A=1$  である。

以上のことから、すべての自然数  $n$  について

$$b_n = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 6 \leq 3 \cdot 1 - 6 = -3$$

であり、すべての自然数  $n$  について  $b_n < 0$  が成り立つ。  $\Rightarrow$  ①

(3)(i) すべての自然数  $k$  について  $\frac{1}{2}c_k^2 \geq 0$  より

$$c_{k+1} = -\frac{1}{2}c_k^2 + 4 \leq 4$$

ゆえに、 $c_{k+1} \leq 4$  は、 $c_k$  の値によらず成り立つ。  $\Rightarrow$  ①

$-4 \leq c_{k+1}$  とすると

$$-4 \leq -\frac{1}{2}c_k^2 + 4$$

$$c_k^2 - 16 \leq 0$$

$$(c_k + 4)(c_k - 4) \leq 0$$

$$-4 \leq c_k \leq 4$$

したがって、 $-4 \leq c_{k+1}$  は、 $-4 \leq c_k \leq 4$  ならば成り立ち、 $c_k < -4$  または  $4 < c_k$  ならば成り立たない。  $\Rightarrow$  ①

### 研究

命題 1 を用いて、命題 2 が真であることを数学的帰納法により証明しよう。

$-4 \leq \alpha \leq 4$  ならば、 $c_1 = \alpha$  より

$$-4 \leq c_1 \leq 4$$

であり、 $n=1$  のとき成り立つ。

$n=k$  ( $\geq 1$ ) のとき

$$-4 \leq c_k \leq 4$$

が成り立つとすると、命題 1 より

$$-4 \leq c_{k+1} \leq 4$$

であり、 $n=k+1$  のときも成り立つ。

よって、数学的帰納法により、すべての自然数  $n$  について  $-4 \leq c_n \leq 4$  が成り立つので、命題 2 は真である。

(ii) (I) について、表 1 より、 $\alpha=5$  のとき  $c_2 = -8.5$  であるから、すべての自然数  $n$  について  $c_n > 4$  は成り立たない。よって、偽である。

(II) について、 $\alpha \leq 4$  ならば、 $c_1 = \alpha$  より

$$c_1 \leq 4$$

である。また、①より

$$c_{n+1} = -\frac{1}{2}c_n^2 + 4 \leq 4 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

ゆえに

$$c_n \leq 4 \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

であるから、すべての自然数  $n$  について  $c_n \leq 4$  は成り立つ。よって、真である。

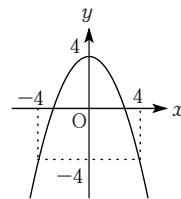
(III) について、 $c_{n+1} = -\frac{1}{2}c_n^2 + 4$  より、 $c_1 = 1$  のときと  $c_1 = -1$  のときの  $c_2$  の値は等しく、表 1 より

$$c_2 = 3.5$$

であるから、 $\alpha = -1$  のとき、すべての自然数  $n$  について  $c_n < 0$  は成り立た

◀  $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  の最大値は 1 である。

◀  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$  のグラフをかいて考えることもできる。



ない。よって、偽である。

以上より、真偽の組合せとして正しいものは⑤である。

## 第5問

- (1) 番号が「777」であるカードは1枚、番号の下二桁が「22」であるカードは10枚、番号の下一桁が「1」であるカードは100枚、上記以外のカードは

$$1000 - (1 + 10 + 100) = 889 \text{ (枚)}$$

あるから

$$p_2 = P(X = 800) = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$$

$$p_4 = P(X = 0) = \frac{889}{1000}$$

であり、確率変数  $X$  の確率分布は次の表で与えられる。

| $X$ | 2000             | 800             | 100            | 0                  | 計 |
|-----|------------------|-----------------|----------------|--------------------|---|
| $P$ | $\frac{1}{1000}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{889}{1000}$ | 1 |

確率変数  $X$  の平均 (期待値)  $E(X)$  は

$$\begin{aligned} E(X) &= 2000 \cdot \frac{1}{1000} + 800 \cdot \frac{1}{100} + 100 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{889}{1000} \\ &= 2 + 8 + 10 = 20 \end{aligned}$$

となる。

### 研究

確率変数  $X$  の分散  $V(X)$  を計算すると

$$\begin{aligned} V(X) &= (2000 - 20)^2 \cdot \frac{1}{1000} + (800 - 20)^2 \cdot \frac{1}{100} + (100 - 20)^2 \cdot \frac{1}{10} \\ &\quad + (0 - 20)^2 \cdot \frac{889}{1000} \\ &= 3920.4 + 6084 + 640 + 355.6 = 11000 \end{aligned}$$

となる。

- (2)(i) 損得点は、1回のくじ引きに対して、得点から25点を引いた差であるから、確率変数  $Y$  は(1)の確率変数  $X$  を用いて

$$Y = X - 25$$

と表せる。

確率変数  $Y$  の平均 (期待値)  $E(Y)$  は、(1)の  $E(X)$  を用いて

$$E(Y) = E(X - 25) = E(X) - 25 = E(X) - c \quad \Leftrightarrow \textcircled{1}$$

となる。また、確率変数  $Y$  の分散  $V(Y)$  は、(1)の  $V(X)$  を用いて

$$V(Y) = V(X - 25) = V(X) \quad \Leftrightarrow \textcircled{0}$$

となる。

- (ii)  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{400}$  は

$$\text{母平均} \quad E(Y) = E(X) - 25 = 20 - 25 = -5$$

$$\text{母標準偏差} \quad \sqrt{V(Y)} = \sqrt{V(X)} = \sqrt{11000} = 10\sqrt{110}$$

の母集団から無作為に抽出した大きさ400の無作為標本とみなせる。

標本の大きさ400は十分に大きいから、標本平均

$$\bar{Y} = \frac{1}{400}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{400})$$

は近似的に正規分布  $N\left(E(Y), \frac{V(Y)}{400}\right)$  に従う。  $\Leftrightarrow \textcircled{5}$

ここで

◀下二桁が「22」のとき

◀  $X$  は得点である。

◀  $X$  を確率変数、 $a$  を定数とすると

$$E(X+a) = E(X) + a$$

◀  $X$  を確率変数、 $a$  を定数とすると

$$V(X+a) = V(X)$$

◀  $\sqrt{11000} = \sqrt{110} \cdot \sqrt{100}$

◀ 母平均  $m$ 、母標準偏差  $\sigma$  の母集団から大きさ  $n$  の標本を無作為に抽出する。標本平均  $\bar{X}$  は、 $n$  が十分に大きいとき、近似的に正規分布  $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$  に従う。

$$E(Y) = -5$$

$$\sqrt{\frac{V(Y)}{400}} = \frac{10\sqrt{110}}{20} = \frac{10.5}{2} = \frac{21}{4}$$

より、確率変数

$$Z = \frac{\bar{Y} - (-5)}{\frac{21}{4}} \left( = \frac{4(\bar{Y} + 5)}{21} \right)$$

は近似的に標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う。

このことから、くじ引きを 400 回繰り返すとき、損得点の合計  $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{400}$  が 0 以上となる確率は

$$\begin{aligned} P(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{400} \geq 0) &= P(\bar{Y} \geq 0) \\ &= P\left(Z \geq \frac{20}{21}\right) \\ &\approx P(Z \geq 0.95) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.95) \\ &= 0.5 - 0.3289 = 0.1711 \\ &\approx \mathbf{0.17} \end{aligned} \quad \Rightarrow \textcircled{0}$$

(3) くじを 3 回引いて得点の合計が 1000 点となるのは、800 点が 1 回、100 点が 2 回のときであり、その確率は

$${}^3C_1 \left(\frac{1}{100}\right) \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{3}{10000} = \mathbf{0.0003} \quad \Rightarrow \textcircled{1}$$

標本の大きさ 400 は十分に大きいので、母標準偏差  $\sigma$  を標本の標準偏差である 75 点とすると、母平均  $m$  に対する信頼度 95% の信頼区間は、得点の平均が 16.75 点より

$$16.75 - 1.96 \cdot \frac{75}{\sqrt{400}} \leq m \leq 16.75 + 1.96 \cdot \frac{75}{\sqrt{400}}$$

$$16.75 - 1.96 \cdot \frac{75}{20} \leq m \leq 16.75 + 1.96 \cdot \frac{75}{20}$$

$$16.75 - 1.96 \cdot 3.75 \leq m \leq 16.75 + 1.96 \cdot 3.75$$

$$16.75 - 7.35 \leq m \leq 16.75 + 7.35$$

$$\mathbf{9.40 \leq m \leq 24.10} \quad \Rightarrow \textcircled{2}$$

である。

◀ 確率変数  $X$  が近似的に正規分布  $N(m, \sigma^2)$  に従うとき、確率変数  $Z = \frac{X - m}{\sigma}$  は近似的に標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う。

$$\leftarrow \bar{Y} = \frac{1}{400}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{400})$$

$$\leftarrow Z = \frac{4(\bar{Y} + 5)}{21}$$

$$\leftarrow \frac{20}{21} = 0.952\dots$$

◀ 標準正規分布曲線は、直線  $z = 0$  に関して対称より

$$P(Z \geq 0) = P(Z \leq 0)$$

$$= 0.5$$

である。また、正規分布表において、0.9 の行と 0.05 の列が交わったところの値を読む。

◀ 反復試行の確率

◀ 母標準偏差  $\sigma$  の母集団から、大きさ  $n$  の無作為標本を抽出する。 $\bar{X}$  を標本平均とするとき、 $n$  が十分に大きければ、母平均  $m$  に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m$$

$$\leq \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

## 第6問

(1)(i) 点  $Q$  が直線  $\ell$  上にあるとき、 $\overrightarrow{MQ} = t\vec{b}$  を満たす実数  $t$  があり

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MQ} = \vec{m} + t\vec{b} \quad \Rightarrow \textcircled{3}$$

となる。

(ii)  $\vec{m} = (2, 3, 5)$  とするとき

$$s\vec{a} = \vec{m} + t\vec{b} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす実数  $s, t$  があると仮定すると

$$s(0, -3, 1) = (2, 3, 5) + t(1, 0, 3)$$

$$(0, -3s, s) = (2 + t, 3, 5 + 3t) \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \Rightarrow \textcircled{3}, \textcircled{1}, \textcircled{5}$$

が成り立つ。

② の両辺の  $x$  成分と  $y$  成分がそれぞれ一致するので

$$0 = 2 + t, \quad -3s = 3$$

よって

$$\mathbf{s = -1, t = -2}$$

である。このとき、②の両辺のz成分は

$$(左辺) = s = -1$$

$$(右辺) = 5 + 3t = 5 + 3(-2) = -1$$

より一致する。したがって、直線 OA と直線  $l$  は交わり、交点の座標は、 $(0, 3, -1)$  である。

(iii)  $\vec{m} = (2, 3, -5)$  とするとき、①を満たす実数  $s, t$  があると仮定すると

$$s(0, -3, 1) = (2, 3, -5) + t(1, 0, 3)$$

$$(0, -3s, s) = (2+t, 3, -5+3t) \dots\dots\dots \textcircled{3} \quad \Leftrightarrow \textcircled{7}$$

が成り立つ。

**研究**

直線 OA と直線  $l$  は交わらないことを確認しよう。③の両辺のx成分とy成分がそれぞれ一致するので

$$s = -1, t = -2$$

である。このとき、③の両辺のz成分は

$$(左辺) = s = -1$$

$$(右辺) = -5 + 3t = -5 + 3(-2) = -11$$

より一致しないので、③が成り立つことに矛盾する。したがって、直線 OA と直線  $l$  は交わらない。

(2)(i)  $\vec{m} = (2, 3, 5)$  とするとき、(1)(ii)より、 $s = -1, t = -2$  のとき、 $s, t$  は

①を満たす。したがって

$$\begin{aligned} -\vec{a} &= \vec{m} - 2\vec{b} \\ \vec{m} &= -\vec{a} + 2\vec{b} \end{aligned}$$

より

$$\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{e} \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

を満たす実数  $\alpha, \beta, \gamma$  は

$$\alpha = -1, \beta = 2, \gamma = 0$$

である。

(ii)  $\vec{m} = (2, 3, -5)$  とするとき

$$\vec{m} = (2, 3, 5) - (0, 0, 10) = (2, 3, 5) - 10\vec{e}$$

より、④を満たす実数  $\alpha, \beta, \gamma$  は

$$\alpha = -1, \beta = 2, \gamma = -10$$

である。

(iii) 直線 OA と直線  $l$  が交わる時、①を満たす実数  $s, t$  があるので

$$\vec{m} = s\vec{a} + (-t)\vec{b} \quad \Leftrightarrow \textcircled{0}, \textcircled{3}$$

となる。したがって、 $\vec{m}$  を④の形で表すとき、 $\gamma = 0$  である。

(3) (I)は、 $\vec{m} = 13\vec{c}$  のとき

$$\vec{m} = 13(-\vec{a} + 2\vec{b}) = -13\vec{a} + 26\vec{b}$$

と表せるので、(2)より、直線 OA と直線  $l$  は交わる。  $\Leftrightarrow \textcircled{0}$

(II)は、 $\vec{m} = \vec{b} + 9\vec{d}$  のとき

$$\vec{m} = \vec{b} + 9(-\vec{a} + 2\vec{b} - 10\vec{e}) = -9\vec{a} + 19\vec{b} - 90\vec{e}$$

と表され、実数  $\alpha, \beta$  を用いて

$$\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

と表せないで、(2)より、直線 OA と直線  $l$  は交わらない。  $\Leftrightarrow \textcircled{1}$

(III)は、 $\vec{m} = 8\vec{a} - 11\vec{d}$  のとき

$$\vec{m} = 8\vec{a} - 11(-\vec{a} + 2\vec{b} - 10\vec{e}) = 19\vec{a} - 22\vec{b} + 110\vec{e}$$

と表され、実数  $\alpha, \beta$  を用いて

◀ 両辺のx成分、y成分、z成分がそれぞれ一致するので、①を満たす実数  $s, t$  がある。よって、直線 OA と直線  $l$  は交わる。

◀ ②と違うのは、右辺のz成分のみである。

◀ 両辺のz成分が一致しないので、直線 OA と直線  $l$  は交わらない。

◀  $s\vec{a} = m + t\vec{b}$

◀  $\vec{e} = (0, 0, 1)$

◀ (i)より  
 $(2, 3, 5) = -\vec{a} + 2\vec{b}$

◀ ①を  $\vec{m} = \dots$  の形にした。

◀  $\vec{c} = (2, 3, 5)$  のとき  
 $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$

◀  $\vec{d} = (2, 3, -5)$  のとき  
 $\vec{d} = -\vec{a} + 2\vec{b} - 10\vec{e}$

$$\vec{m} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$$

と表せないので、(2)より、直線 OA と直線  $l$  は交わらない。

⇒ ①

⋮

# 第7問

(1)(i) 方程式

$$|z-1|+|z+1|=4 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

は、点  $z$  と点  $1$  の距離と、点  $z$  と点  $-1$  の距離の和が一定であることを表している。  $\Rightarrow \textcircled{1}$

◀  $|z-a|$  は点  $z$  と点  $a$  の距離を表す。

(ii)  $z = x + yi$  とおくと、方程式  $\textcircled{1}$  は

$$\begin{aligned} |z-1| &= 4 - |z+1| \\ |(x-1) + yi| &= 4 - |(x+1) + yi| \\ \sqrt{(x-1)^2 + y^2} &= 4 - \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \textcircled{4}, \textcircled{2}$$

◀  $|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$

と変形できる。

両辺を2乗して計算すると

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + y^2 &= 16 - 8\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + (x+1)^2 + y^2 \\ 4x + 16 &= 8\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \\ x + 4 &= 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \textcircled{3}$$

となる。

さらに両辺を2乗して計算すると

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 16 &= 4\{(x+1)^2 + y^2\} \\ 3x^2 + 4y^2 &= 12 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} &= 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \textcircled{1}$$

となる。

(iii)  $\textcircled{2}$  は  $xy$  平面上における楕円の方程式である。焦点の座標は

$$(\pm\sqrt{4-3}, 0) \text{ すなわち } (\pm 1, 0)$$

であり、長軸の長さは

$$2 \cdot 2 = 4$$

である。

したがって、複素数平面上で方程式  $\textcircled{1}$  を満たす点  $z$  全体は、複素数平面上における2点  $1, -1$  を焦点とし、長軸の長さが4の楕円である。  $\Rightarrow \textcircled{2}$

◀ 楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) の焦点の座標は  $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$  であり、長軸の長さは  $2a$  である。

(2) 点  $w$  は、点  $z$  を原点を中心に  $\frac{\pi}{4}$  だけ回転した点であるから、点  $w$  と点  $z$  は、関係式

$$w = \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) z \quad \dots\dots\dots \textcircled{3} \quad \Rightarrow \textcircled{7}$$

を満たす。

点  $1$  を原点を中心に  $\frac{\pi}{4}$  だけ回転した点は

$$\left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

であり、点  $-1$  を原点を中心に  $\frac{\pi}{4}$  だけ回転した点は

$$\left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \cdot (-1) = -\left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

である。点  $w$  はこれら2点からの距離の和が4である点であるから、方程式

$$\left| w - \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \right| + \left| w + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \right| = 4 \quad \Rightarrow \textcircled{4}$$

を満たす。

◀ 点  $z$  を原点を中心に角  $\theta$  だけ回転した点は  $(\cos \theta + i \sin \theta)z$

## 別解

「解答」では、焦点である2点  $1, -1$  に注目して求めたが、 $\textcircled{3}$  より、 $z$  を  $w$  で表して求めることもできる。すなわち

$$w = \frac{1+i}{\sqrt{2}}z$$

より

$$z = \frac{\sqrt{2}}{1+i}w$$

であり、これを方程式①に代入して

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\sqrt{2}}{1+i}w - 1 \right| + \left| \frac{\sqrt{2}}{1+i}w + 1 \right| = 4 \\ & \left| \frac{\sqrt{2}}{1+i} \left( w - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \right| + \left| \frac{\sqrt{2}}{1+i} \left( w + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \right| = 4 \\ & \left| \frac{\sqrt{2}}{1+i} \right| \left| w - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right| + \left| \frac{\sqrt{2}}{1+i} \right| \left| w + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right| = 4 \dots\dots\dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

ここで

$$\left| \frac{\sqrt{2}}{1+i} \right| = \frac{|\sqrt{2}|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+1^2}} = 1$$

より、④は

$$\left| w - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right| + \left| w + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right| = 4$$

となり、「解答」と同じ式が得られる。

(3) 点1を原点を中心に角 $\theta$ だけ回転した点は

$$(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot 1 = \cos\theta + i\sin\theta$$

であり、点-1を原点を中心に角 $\theta$ だけ回転した点は

$$(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot (-1) = -(\cos\theta + i\sin\theta)$$

である。点 $z$ を原点を中心に角 $\theta$ だけ回転した点 $\alpha$ は、これら2点からの距離の和が4である点であるから、方程式

$$|\alpha - (\cos\theta + i\sin\theta)| + |\alpha + (\cos\theta + i\sin\theta)| = 4 \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

を満たす。

①, ③, ④は、⑤の形ではないので不適である。

②は

$$\cos\theta + i\sin\theta = \frac{1}{2}$$

を満たす角 $\theta$ が存在しないので不適である。

⑤は

$$\cos\theta + i\sin\theta = i$$

を満たす角 $\theta$ として、例えば $-\frac{\pi}{2}$ を定めることができる。

以上より、点 $\alpha$ が満たす方程式となるのは⑤である。

◀  $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

◀  $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

◀  $\frac{\pi}{4}$ を $\theta$ にして、②と同様に考える。

◀  $|\alpha - k| + |\alpha + k| = 4$ の形ではない。