

第 1 問

[1]

$$|x+6| \leq 2 \quad \dots\dots\dots (*)$$

(\*) の絶対値をはずすと

$$-2 \leq x+6 \leq 2$$

よって

$$-8 \leq x \leq -4$$

$a, b, c, d$  が実数のとき  $(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)$  も実数である。不等式

$$|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6| \leq 2$$

は, (\*) において  $x = (1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)$  としたものであるから

$$-8 \leq (1-\sqrt{3})(a-b)(c-d) \leq -4$$

$1-\sqrt{3} < 0$  より

$$\frac{-8}{1-\sqrt{3}} \geq (a-b)(c-d) \geq \frac{-4}{1-\sqrt{3}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}-1} \leq (a-b)(c-d) \leq \frac{8}{\sqrt{3}-1}$$

$$\frac{4(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \leq (a-b)(c-d) \leq \frac{8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$2+2\sqrt{3} \leq (a-b)(c-d) \leq 4+4\sqrt{3}$$

である。とくに

$$(a-b)(c-d) = 4+4\sqrt{3} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

であるとき, さらに

$$(a-c)(b-d) = -3+\sqrt{3} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

が成り立つならば, ①, ②の左辺をそれぞれ展開して

$$ac-ad-bc+bd = 4+4\sqrt{3} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}'$$

$$ab-ad-bc+cd = -3+\sqrt{3} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}'$$

ここで, ③の左辺を展開すると

$$(a-d)(c-b) = ac-ab-cd+bd$$

となるので, ①'-②' より

$$ac-ab-cd+bd = 7+3\sqrt{3}$$

よって

$$(a-d)(c-b) = 7+3\sqrt{3}$$

[2]

(1)(i)  $\triangle ABC$  の外接円は円  $O$  であり, その半径は 5 であるから,  $\triangle ABC$  において, 正弦定理より

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2 \cdot 5$$

$AB = 6$  より

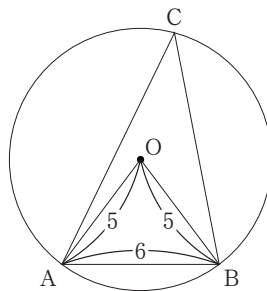
$$\sin \angle ACB = \frac{6}{2 \cdot 5} = \frac{3}{5} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\Leftrightarrow \textcircled{4}$

点  $C$  が円  $O$  の円周上のどこにあって

も,  $AB, OA$  の値は変わらないため, ①は  $\angle ACB$  が鋭角, 鈍角のどちらであって成り立つ。

よって,  $\angle ACB$  が鈍角のとき,  $\cos \angle ACB < 0$  より



$$\cos \angle ACB = -\sqrt{1 - \sin^2 \angle ACB} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \textcircled{7}$$

- (ii)  $\triangle ABC$  の面積が最大となるのは、底辺  $AB = 6$  に対して、高さ  $CD$  が最大となるように点  $C$  をとるときである。すなわち、次の図のように線分  $CD$  が中心  $O$  を通るときである。

このとき、点  $D$  は辺  $AB$  の中点であるから、 $AD = 3$  である。したがって、 $\triangle OAD$  は  $\angle ODA = 90^\circ$  の直角三角形であるから、三平方の定理より

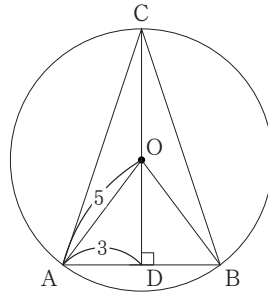
$$OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

よって

$$\tan \angle OAD = \frac{OD}{AD} = \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \textcircled{4}$$

また、 $\triangle ABC$  の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot (OC + OD) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (5 + 4) \\ &= 27 \end{aligned}$$



◀  $OA$  は円  $O$  の半径であるから  $OA = 5$

- (2) まず、平面  $\alpha$  上の  $\triangle PQR$  について考える。

$\triangle PQR$  において、余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \angle QPR &= \frac{PQ^2 + PR^2 - QR^2}{2 \cdot PQ \cdot PR} \\ &= \frac{8^2 + 9^2 - 5^2}{2 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

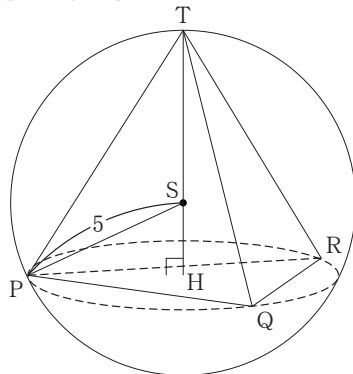
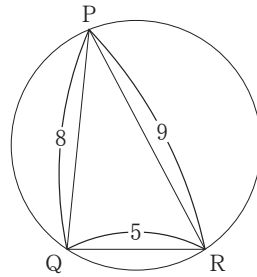
また、 $\sin \angle QPR > 0$  であるから

$$\begin{aligned} \sin \angle QPR &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle QPR} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{6} \end{aligned}$$

よって、 $\triangle PQR$  の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot PR \cdot \sin \angle QPR = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = 6\sqrt{11}$$

次に、三角錐  $TPQR$  の体積が最大となるのは、底面の  $\triangle PQR$  に対して、高さ  $TH$  が最大となるように点  $T$  をとるとき、すなわち、次の図のように線分  $TH$  が球の中心  $S$  を通るときである。



このとき、平面  $\alpha$  は直線  $SH$  に垂直な平面となる。したがって、 $\triangle PQR$  の外接円の中心が点  $H$  となるから

$$PH = QH = RH \quad \Leftrightarrow \textcircled{6}$$

また、 $PH$ ,  $QH$ ,  $RH$  は  $\triangle PQR$  の外接円の半径であるから、 $\triangle PQR$  におい

て、正弦定理より

$$\frac{QR}{\sin \angle QPR} = 2PH$$

よって

$$PH = \frac{1}{2} \cdot \frac{QR}{\sin \angle QPR} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{15}{\sqrt{11}}$$

直角三角形 SPH において、三平方の定理より

$$\begin{aligned} SH &= \sqrt{SP^2 - PH^2} \\ &= \sqrt{5^2 - \left(\frac{15}{\sqrt{11}}\right)^2} \\ &= \sqrt{5^2 \left(1 - \frac{3^2}{11}\right)} \\ &= 5\sqrt{\frac{2}{11}} = \frac{5\sqrt{22}}{11} \end{aligned}$$

したがって、三角錐 TPQR の体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \Delta PQR \cdot TH &= \frac{1}{3} \cdot \Delta PQR \cdot (TS + SH) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{11} \cdot \left(5 + \frac{5\sqrt{22}}{11}\right) \\ &= 10\sqrt{11} + 10\sqrt{2} \\ &= 10(\sqrt{11} + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

### 別解

PH, QH, RH の長さについては、次のように考えることもできる。

SP, SQ, SR は、球 S の半径で互いに等しく、辺 SH は共通である。よって、直角三角形の斜辺と他の一辺が等しいから

$$\Delta SPH \equiv \Delta SQH \equiv \Delta SRH$$

これより、PH = QH = RH である。

## 第2問

[1]

(1) 52 市のデータの値を小さい順に並べたとき



- 中央値は、26 番目と 27 番目のデータの値の平均
  - 第 1 四分位数は、13 番目と 14 番目のデータの値の平均
  - 第 3 四分位数は、39 番目と 40 番目のデータの値の平均
- である。

ここで、図 1 のヒストグラムを度数分布表に整理すると、次のようになる。

階級	1000 ~ 1400	1400 ~ 1800	1800 ~ 2200	2200 ~ 2600	2600 ~ 3000	3000 ~ 3400	3400 ~ 3800	3800 ~ 4200	4200 ~ 4600	4600 ~ 5000
度数	2	7	11	7	10	8	5	0	1	1
累積 度数	2	9	20	27	37	45	50	50	51	52

よって

- 第 1 四分位数が含まれる階級は、1800 以上 2200 未満 である。

⇨ ②

- 第3四分位数が含まれる階級は、3000以上3400未満である。 ⇨ ⑤

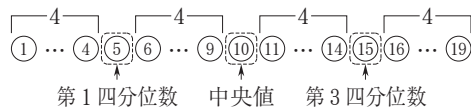
- 四分位範囲は

$$3400 - 1800 = 1600$$

$$3000 - 2200 = 800$$

より、800より大きく1600より小さい。 ⇨ ①

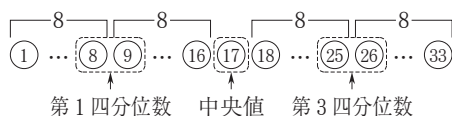
- (2) 地域Eの19個のデータの値を小さい順に並べたとき



- 中央値は、10番目のデータの値
- 第1四分位数は、5番目のデータの値
- 第3四分位数は、15番目のデータの値

である。

地域Wの33個のデータの値を小さい順に並べたとき



- 中央値は、17番目のデータの値
- 第1四分位数は、8番目と9番目のデータの値の平均
- 第3四分位数は、25番目と26番目のデータの値の平均

である。

- (i) 図2および図3から読み取れることとして、各選択肢について考察する。

④について、地域Eの第1四分位数は2000よりも大きく、これは小さい方から5番目のデータの値であるため、正しくない。

①について、地域Eの最大値はおよそ3700であり、最小値はおよそ1200であるから、その範囲はおよそ2500(=3700-1200)である。地域Wの最大値はおよそ5000であり、最小値はおよそ1400であるから、その範囲はおよそ3600(=5000-1400)である。したがって、正しくない。

②について、地域Eの中央値は2400以下であり、地域Wの中央値は2600以上であるから、正しい。

③について、地域Eの中央値は2600より小さいため、2600未満の地域の割合は0.5より大きい。地域Wの中央値は2600より大きいため、2600未満の地域の割合は0.5より小さい。したがって、正しくない。

以上より、正しいものは②である。

- (ii) 分散の定義は、「偏差の2乗」の平均であるから、偏差の2乗を合計して地域Eの市の数で割った値である。 ⇨ ②

### 研究

データ  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の平均を  $\bar{x}$  とすると、それぞれの偏差、すなわち平均との差は  $x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}$  と表され、分散は

$$s^2 = \frac{1}{n} \{ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \}$$

と表される。

- (3) 地域Eにおけるやきとりの支出金額を  $S$ 、かば焼きの支出金額を  $T$  とすると、 $S$  と  $T$  の相関係数は

$$\frac{(S \text{ と } T \text{ の 共分散})}{(S \text{ の 標準偏差}) \times (T \text{ の 標準偏差})} = \frac{124000}{590 \times 570} = \frac{1240}{3363} = 0.368\dots$$

小数第3位を四捨五入すると、やきとりの支出金額とかば焼きの支出金額の相関係数は **0.37** である。 ⇨ ⑦

[2]

(1) 放物線  $C_1$  の方程式を

$$y = ax^2 + bx + c \quad \dots\dots\dots ①$$

とおくと、①は点  $P_0(0, 3)$ ,  $M(4, 3)$  を通るから

$$3 = c, \quad 3 = 16a + 4b + c$$

したがって

$$b = -4a, \quad c = 3$$

①に代入して

$$y = ax^2 - 4ax + 3$$

これを平方完成すると

$$y = a(x-2)^2 - 4a + 3 \quad \dots\dots\dots ②$$

となるから、放物線  $C_1$  の頂点は点  $(2, -4a + 3)$  である。仮定より、プロ選手の「シュートの高さ」は  $C_1$  の頂点の  $y$  座標のことであるから

$$-4a + 3$$

放物線  $C_2$  の方程式は

$$y = p \left\{ x - \left( 2 - \frac{1}{8p} \right) \right\}^2 - \frac{(16p-1)^2}{64p} + 2$$

より、頂点は点  $\left( 2 - \frac{1}{8p}, -\frac{(16p-1)^2}{64p} + 2 \right)$  である。よって、「ボールが最も高くなるときの地上の位置」は、 $C_1$ ,  $C_2$  の頂点の  $x$  座標であるから

プロ選手: 2

$$\text{花子さん: } 2 - \frac{1}{8p}$$

となる。仮定より、 $C_2$  の頂点の  $x$  座標は4よりも小さく、 $C_2$  は上に凸の放物線であるから、 $p < 0$  より  $-\frac{1}{8p} > 0$  であり

$$2 < 2 - \frac{1}{8p} < 4$$

よって、花子さんの「ボールが最も高くなるときの地上の位置」の方が、つねに **M** の  $x$  座標に近い。 ⇨ ②

**別解**

放物線  $C_1$  は  $P_0(0, 3)$ ,  $M(4, 3)$  を通るので、放物線の対称性より  $C_1$  の頂点の  $x$  座標は2であることがわかる。よって、 $C_1$  の方程式は実数  $d$  を用いて

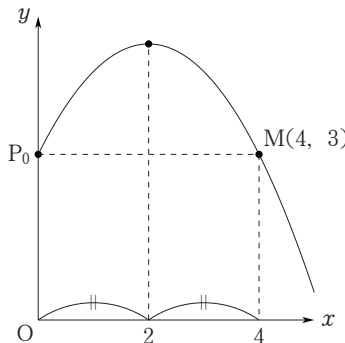
$$y = a(x-2)^2 + d$$

と表される。 $C_1$  は  $(0, 3)$  を通るので

$$3 = 4a + d$$

$$d = -4a + 3$$

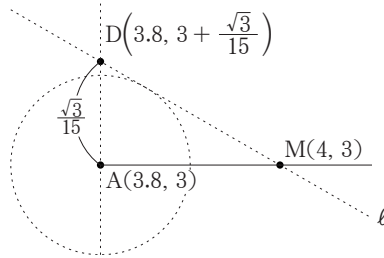
となることから  $y = ax^2 - 4ax + 3$  を求めることができる。



◀②より。

◀図1より、 $C_2$  の頂点の  $x$  座標は **M** の  $x$  座標よりも小さい。

(2)



$AD = \frac{\sqrt{3}}{15}$ より, 点Dの座標は  $(3.8, 3 + \frac{\sqrt{3}}{15})$  であるから, 放物線  $C_1$  が点Dを通るとき, ②より

$$3 + \frac{\sqrt{3}}{15} = a \cdot (3.8 - 2)^2 - 4a + 3$$

$$\frac{\sqrt{3}}{15} = a \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^2 - 4a$$

$$-\frac{19}{25}a = \frac{\sqrt{3}}{15}$$

$$a = -\frac{5\sqrt{3}}{57}$$

$C_1$  の方程式は

$$y = ax^2 - 4ax + 3$$

$$= a(x^2 - 4x) + 3$$

であるから

$$y = -\frac{5\sqrt{3}}{57}(x^2 - 4x) + 3$$

となる。よって, プロ選手の「シュートの高さ」は

$$-4a + 3 = -4 \cdot \left(-\frac{5\sqrt{3}}{57}\right) + 3$$

$$= \frac{20\sqrt{3}}{57} + 3$$

$$\approx \frac{20 \times 1.73}{57} + 3$$

$$\approx 3.6$$

である。花子さんの「シュートの高さ」が約 3.4 であるから, プロ選手の「シュートの高さ」の方が大きい。 ⇨ ⑥

また, その差は約 0.2 であるから, ボール 約 1 個分である。 ⇨ ⑥

### 第3問

- (1) 図Bにおいて, 球1の塗り方は5通りあり, それ以外の色で球2を塗るから, 球2の塗り方は4通りである。同様にして, 球3, 球4の塗り方もそれぞれ4通りであるから

$$5 \times 4 \times 4 \times 4 = 320 \text{ (通り)}$$

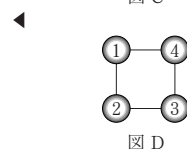
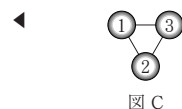
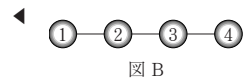
- (2) 図Cにおいて, 球1の塗り方は5通りあり, 球2の塗り方は4通りある。球3は球1, 球2の色以外の色で塗るので, その塗り方は3通りあるから

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ (通り)}$$

- (3) 図Dにおいて, 赤をちょうど2回使う場合

- 球1と球3を赤で塗る
- 球2と球4を赤で塗る

の2通りの塗り方がある。どちらの場合でも, 赤で塗らなかった二つの球は, 赤



以外の4色からそれぞれ1色選んで塗ればよいから

$$2 \times 4 \times 4 = 32 \text{ (通り)}$$

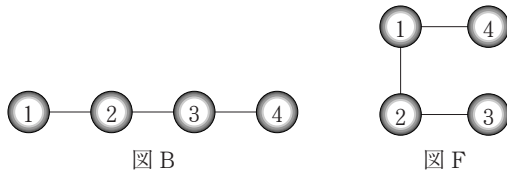
- (4) 図Eにおいて、赤をちょうど3回使い、かつ青をちょうど2回使う場合、ひもでつながれた球の色は異なるから、全ての球とひもでつながれた球1には赤と青を塗ることができない。よって、球1の塗り方は赤、青以外の3通りある。あとは、球2~球6のうち三つを赤で塗り、残った二つを青で塗ればよい。赤で塗る球の選び方は

$${}^5C_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ (通り)}$$

であるから、塗り方の総数は

$$3 \times 10 = 30 \text{ (通り)}$$

- (5) 図Fにおいて、塗り方の総数は図Bと同じになるため、320通りである。



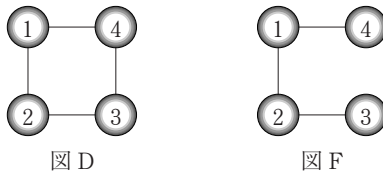
そのうち、球3と球4が同色になる塗り方は

「球3と球4が同色であり、球1と球2がそれぞれ球3(球4)と異なる色で、かつ球1と球2が異なる色」

であればよい。

よって、その塗り方の総数は、球1、球2、球3が同色でない場合の数であり、塗り方の総数が一致する図は、球1と球2、球2と球3、球3と球1がそれぞれひもでつながれたものである。 ⇨ ②

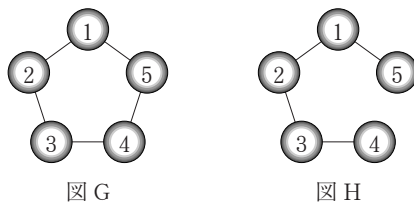
したがって、球3と球4が同色になる塗り方は、図Cと同様であるから、(2)より60通りである。



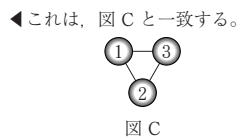
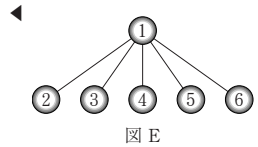
図Dの塗り方の総数は、図Fの塗り方の総数から球3と球4が同色になる場合を除いたものであるから

$$320 - 60 = 260 \text{ (通り)}$$

- (6) (5)と同様に、図Gの塗り方の総数を、球4と球5のつながりを無くした図Hと比較して考える。



図Hにおける塗り方の総数は、五つの球が一直線につながれていると考えればよいから、(1)と同様に考えて



$$5 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1280 \text{ (通り)}$$

このうち、球4と球5が同色の場合の塗り方の総数は、(5)と同様に考えると、図Dの塗り方の総数と等しく、その総数は260通りである。

よって、求める図Gの塗り方の総数は

$$1280 - 260 = 1020 \text{ (通り)}$$

## 第4問

(1) 462と110をそれぞれ素因数分解すると

$$462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

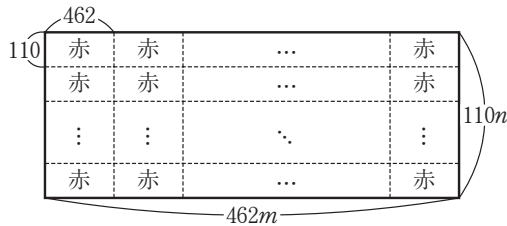
$$110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$$

であるから、両方を割り切る素数のうち最大のものは11である。

赤い長方形を並べて作ることができる正方形の一辺の長さは、462と110の公倍数である。よって、辺の長さが最小となるときの辺の長さは462と110の最小公倍数であるから

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$$

赤い長方形を並べて正方形ではない長方形を作るとき、赤い長方形を横に  $m$  枚、縦に  $n$  枚並べると、次の図のようになる。



横の長さとの縦の長さの差の絶対値は

$$|462m - 110n| = 22|21m - 5n| \quad \text{①}$$

である。正方形でないことから  $21m - 5n \neq 0$  であり、 $m, n$  は自然数であるから、①が最小となるのは  $|21m - 5n| = 1$  の場合が考えられる。

このとき、 $m = 1, n = 4$  とすると

$$21m - 5n = 21 \cdot 1 - 5 \cdot 4 = 1$$

であるから、①の最小値は

$$|462m - 110n| = 22 \cdot 1 = 22$$

縦の長さが横の長さより22だけ長いとき

$$110n - 462m = 22$$

両辺を22で割って

$$5n - 21m = 1 \quad \text{②}$$

ここで、 $21 \cdot 1 - 5 \cdot 4 = 1$  より

$$5 \cdot (-4) - 21 \cdot (-1) = 1 \quad \text{③}$$

② - ③ より

$$5(n + 4) = 21(m + 1) \quad \text{④}$$

5と21は互いに素であるから、 $m + 1$ は5の倍数である。よって、 $l$ を整数とすると

$$m + 1 = 5l$$

と表すことができる。このとき

$$m = 5l - 1$$

◀  $21m - 5n = 0$  のとき

$$462m = 110n$$

であるから、赤い長方形を並べた図形は正方形になる。

であるから、これを④に代入して

$$5(n+4) = 21 \cdot 5\ell$$

$$n = 21\ell - 4$$

よって、自然数  $m, n$  について、横の長さ  $462m$  が最小となるのは、 $\ell = 1$  のときである。このとき

$$m = 4, n = 17$$

であり、長方形の横の長さは

$$462m = 462 \cdot 4 = 1848$$

- (2) 赤い長方形を並べてできる長方形の縦の長さと、青い長方形を並べてできる長方形の縦の長さが等しいとき、縦の長さは 110 と 154 の公倍数となる。

110 と 154 を素因数分解すると

$$110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$$

$$154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$$

より、110 と 154 の最小公倍数は

$$2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 770 \quad \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

であるから、縦の長さの最小値は 770 であり、図 2 のような長方形は縦の長さが 770 の倍数である。

462 と 363 を素因数分解すると

$$462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

$$363 = 3 \cdot 11 \cdot 11$$

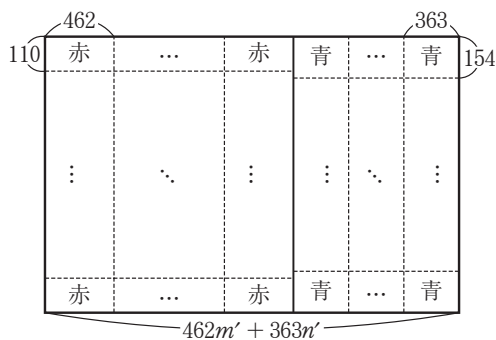
より、462 と 363 の最大公約数は

$$3 \cdot 11 = 33 \quad \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

であり、33 の倍数のうちで 770 の倍数でもある最小の正の整数、すなわち、33 と 770 の最小公倍数は、⑤、⑥より

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$$

したがって、図 2 のような正方形の横の長さは、2310 の倍数である。このとき、赤い長方形を  $m'$  枚、青い長方形を  $n'$  枚、横に並べると、次の図のようになる。



$k$  を自然数とすると

$$462m' + 363n' = 2310k$$

$$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11m' + 3 \cdot 11 \cdot 11n' = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11k$$

であるから、両辺を  $3 \cdot 11$  で割って

$$2 \cdot 7m' + 11n' = 2 \cdot 5 \cdot 7k$$

これを満たす自然数  $k, m', n'$  を考えると

$$11n' = 2 \cdot 7(5k - m')$$

11 と 2・7 は互いに素であるから、 $5k - m'$  は 11 の正の倍数である。 $k, m', n'$  は自然数であり、 $k = 1, 2$  のとき、条件を満たす自然数  $m'$  は存在しない。 $k = 3$  のとき、 $m' = 4$  とすれば、 $5k - m' = 11$  となる。

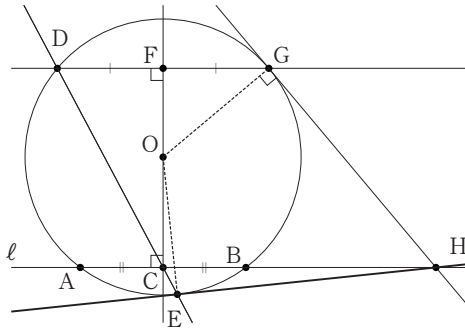
よって、図 2 のような正方形のうち、辺の長さが最小となるのは  $k = 3$  のときで、そのときの一辺の長さは

$$2310 \times 3 = 6930$$

◀  $m'$  は自然数なので、 $k = 1, 2$  のとき  
 $5k - m' < 11$   
 となり、11 の正の倍数にはならない。

## 第5問

(1) 手順 1 に従って図をかくと、次のようになる。



直線 EH が円 O の接線であることを証明するには、OE と EH が垂直に交わる、すなわち

$$\angle OEH = 90^\circ$$

であることを示せばよい。

円の弦の垂直二等分線は、その円の中心を通るので

$$\angle OCH = 90^\circ$$

直線 GH は円 O の接線であるから、 $OG \perp GH$  より

$$\angle OGH = 90^\circ$$

これより、 $\angle OCH + \angle OGH = 180^\circ$  となるから、対角の和が  $180^\circ$  であることより、四角形 OCHG は円に内接する。

したがって、4 点 C, G, H, O は同一円周上にある。 ⇨ ③

よって、円に内接する四角形の内角は、その対角の外角と等しいから

$$\angle CHG = \angle FOG \quad \text{⇨ ④}$$

OF  $\perp$  DG, DF = FG, OF は共通より、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ODF \equiv \triangle OGF$$

よって

$$\angle FOG = \angle FOD = \frac{1}{2} \times \angle DOG \quad \dots\dots\dots ①$$

また、弧 DG に対する円周角と中心角の関係より

$$\angle DEG = \frac{1}{2} \times \angle DOG \quad \dots\dots\dots ②$$

①, ②より

$$\angle FOG = \angle DEG \quad \text{⇨ ③}$$

以上より、 $\angle CHG = \angle DEG$ , すなわち

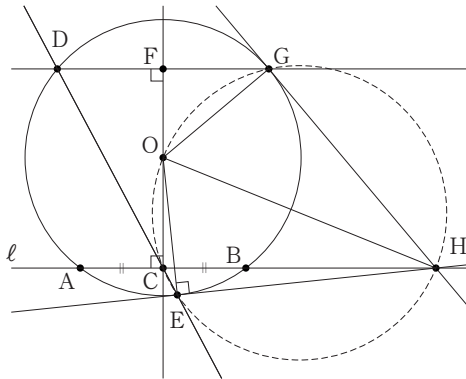
$$\angle CHG = \angle CEG$$

が成り立つから、円周角の定理の逆より、4 点 C, G, H, E は同一円周上にある。 ⇨ ②

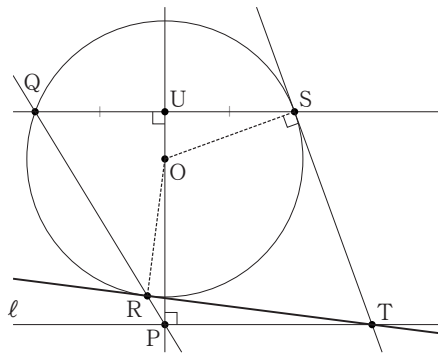
この円も、4点 C, G, H, O を通る円も  $\triangle CGH$  の外接円である。よって、この円は点 O を通るので、弧 OH に対する円周角より

$$\angle OEH = \angle OCH = 90^\circ$$

を示すことができる。



(2) 手順 2 に従って図をかくと、次のようになる。



直線 ST は円 O の接線であるから

$$\angle OST = 90^\circ$$

$OP \perp l$  より  $\angle OPT = 90^\circ$  で、 $\angle OST + \angle OPT = 180^\circ$  となるから、対角の和が  $180^\circ$  であることより、四角形 OPTS は円に内接する。

円に内接する四角形の内角は、その対角の外角と等しいから、線分 SQ の中点を U とすると

$$\angle PTS = \angle UOS \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

また、 $QU = SU$ ,  $UO$  は共通より、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle OUQ \equiv \triangle OUS$$

であるから

$$\angle UOS = \angle UOQ = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$$

さらに、弧 SQ に対する円周角と中心角の関係より

$$\angle QRS = \frac{1}{2} \times \angle SOQ = \angle UOS \quad \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

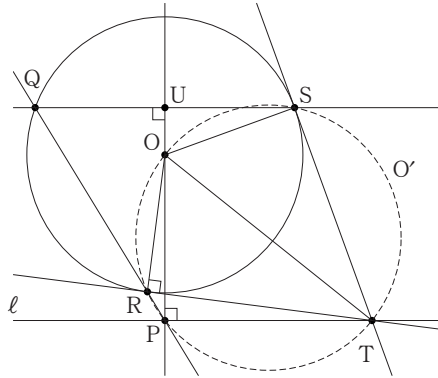
③, ④より

$$\angle PTS = \angle QRS \quad \Leftrightarrow \textcircled{3}$$

したがって、四角形 RPTS において、一つの内角とその対角の外角が等しいから、四角形 RPTS は円に内接する。このとき、四角形 OPTS も円に内接するから、3 点 P, T, S を通る円周上に点 O, R もあることがわかる。すなわち、5

点 O, R, P, T, S は同一円周上にある。

この 5 点を通る円を  $O'$  とおく。



円 O の半径が  $\sqrt{5}$ ,  $OT = 3\sqrt{6}$  のとき,  $\angle OPT = 90^\circ$  より, 円  $O'$  の直径が OT となるから, 円  $O'$  の半径  $r$  は

$$r = \frac{OT}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

円  $O'$  において, 半円の弧に対する円周角であるから

$$\angle ORT = 90^\circ$$

したがって, 直角三角形 ORT において, 三平方の定理より

$$OR^2 + RT^2 = OT^2$$

であり, OR は円 O の半径なので

$$\begin{aligned} RT &= \sqrt{OT^2 - OR^2} \\ &= \sqrt{(3\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2} \\ &= 7 \end{aligned}$$