第 1 問

〔1〕

(1)　$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $2x=\dfrac{\pi}{3}$ であり

$$\sin x=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\qquad \sin 2x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって

$$\boldsymbol{\sin x<\sin 2x}$$ ⇨ ⓪

◀ $\dfrac{1}{2}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき $2x=\dfrac{4}{3}\pi$ であり

$$\sin x=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \sin 2x=\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって

$$\boldsymbol{\sin x>\sin 2x}$$ ⇨ ②

◀ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}>-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　2 倍角の公式より

$$\boldsymbol{\sin 2x-\sin x}=2\sin x\cos x-\sin x=\boldsymbol{\sin x(2\cos x-1)}$$

であるから，$\sin 2x-\sin x>0$ が成り立つことは

「$\sin x>0$ かつ $2\cos x-1>0$」 ……………………… ①

または

「$\sin x<0$ かつ $2\cos x-1<0$」 ……………………… ②

が成り立つことと同値である。

$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき，①が成り立つような x の値の範囲は

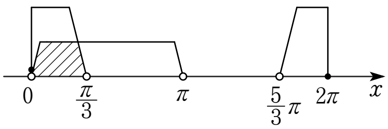
「$\sin x>0$ かつ $\cos x>\dfrac{1}{2}$」

より

「$0<x<\pi$」かつ「$0\leqq x<\dfrac{\pi}{3}$ または $\dfrac{5}{3}\pi<x\leqq 2\pi$」

よって

$$\boldsymbol{0<x<\frac{\pi}{3}}$$



②が成り立つような x の値の範囲は

「$\sin x<0$ かつ $\cos x<\dfrac{1}{2}$」

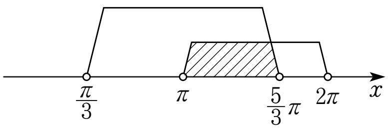
より

「$\pi<x<2\pi$」かつ

「$\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{5}{3}\pi$」

よって

$$\boldsymbol{\pi<x<\frac{5}{3}\pi}$$



したがって，$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき，$\sin 2x-\sin x>0$ すなわち $\sin 2x>\sin x$ が成り立つような x の値の範囲は

$0<x<\dfrac{\pi}{3}$，$\pi<x<\dfrac{5}{3}\pi$ ……………………… ⑥

(3)　$\alpha+\beta=4x$，$\alpha-\beta=3x$ を満たす α，β は

$$\alpha=\frac{7}{2}x,\ \beta=\frac{x}{2}$$

であるから，③より

◀ 2 式の辺々の和をとると
$2\alpha=7x$
2 式の辺々の差をとると
$2\beta=x$
である。

$$\sin 4x - \sin 3x = 2\cos\frac{7}{2}x\sin\frac{x}{2}$$

よって，$\sin 4x - \sin 3x > 0$ が成り立つことは

「$\boldsymbol{\cos\frac{7}{2}x > 0}$ **かつ** $\boldsymbol{\sin\frac{x}{2} > 0}$」 ……………………………… ④

または

「$\cos\frac{7}{2}x < 0$ かつ $\sin\frac{x}{2} < 0$」 ……………………………… ⑤

が成り立つことと同値であることがわかる。 ⇨ ⓐ, ⑦

　$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$0 \leqq \frac{7}{2}x \leqq \frac{7}{2}\pi,\quad 0 \leqq \frac{x}{2} \leqq \frac{\pi}{2}$$

より，④が成り立つような x の値の範囲は

「$0 \leqq \frac{7}{2}x < \frac{\pi}{2}$ または $\frac{3}{2}\pi < \frac{7}{2}x < \frac{5}{2}\pi$」 かつ 「$0 < \frac{x}{2} \leqq \frac{\pi}{2}$」

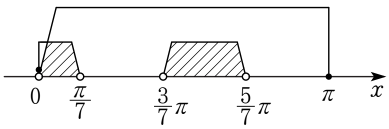
すなわち

「$0 \leqq x < \frac{\pi}{7}$ または $\frac{3}{7}\pi < x < \frac{5}{7}\pi$」 かつ 「$0 < x \leqq \pi$」

よって

$$0 < x < \frac{\pi}{7},$$

$$\frac{3}{7}\pi < x < \frac{5}{7}\pi$$



◀$0 < x < \frac{\pi}{7}$，$\frac{3}{7}\pi < x < \frac{5}{7}\pi$ はいずれも $0 < x \leqq \pi$ に含まれている。

⑤が成り立つような x の値の範囲は，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $\sin\frac{x}{2} \geqq 0$ より

$$\sin\frac{x}{2} < 0$$

が成り立たないので存在しない。

　よって，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin 4x - \sin 3x > 0$ すなわち $\sin 4x > \sin 3x$ が成り立つような x の値の範囲は

$$\boldsymbol{0 < x < \frac{\pi}{7},\quad \frac{3}{7}\pi < x < \frac{5}{7}\pi}$$

である。

(4)　$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin 3x > \sin 4x$ となるのは，(3)より

$\frac{\pi}{7} < x < \frac{3}{7}\pi,\quad \frac{5}{7}\pi < x < \pi$ ……………………………………… ⑦

◀$0 \leqq x \leqq \pi$ から，(3)で求めた $0 < x < \frac{\pi}{7}$，$\frac{3}{7}\pi < x < \frac{5}{7}\pi$ と $x = 0$，$\frac{\pi}{7}$，$\frac{3}{7}\pi$，$\frac{5}{7}\pi$，π を除いた範囲である。

$\sin 4x > \sin 2x$ となるのは，(2)より，⑥において x を $2x$ とすればよく，$0 \leqq x \leqq \pi$ において

$$0 < 2x < \frac{\pi}{3},\quad \pi < 2x < \frac{5}{3}\pi$$

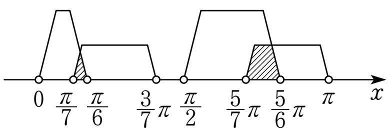
すなわち

$0 < x < \frac{\pi}{6},\quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi$ ……………………………………… ⑧

であるから，$\sin 3x > \sin 4x > \sin 2x$ が成り立つような x の値の範囲は，⑦，⑧の共通部分をとって

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{7} < x < \frac{\pi}{6},}$$

$$\boldsymbol{\frac{5}{7}\pi < x < \frac{5}{6}\pi}$$



であることがわかる。

〔2〕

(1)　$a > 0$，$a \neq 1$，$b > 0$ のとき，$\log_a b = x$ とおくと

$\boldsymbol{a^x = b}$ ⇨ ②

が成り立つ。

(2)(i)　$\log_5 25 = x$ とおくと

$25 = 5^x$ すなわち $5^2 = 5^x$
よって
$$\boldsymbol{x = \log_5 25 = 2}$$
$\log_9 27 = y$ とおくと
$27 = 9^y$ すなわち $3^3 = 3^{2y}$
よって
$$\boldsymbol{y = \log_9 27 = \frac{3}{2}}$$
であり，x と y はどちらも有理数である。

(ii)　二つの自然数 p，q を用いて，$\log_2 3 = \dfrac{p}{q}$ と表せるとすると，(1)より
$$2^{\frac{p}{q}} = 3$$
となり，この式の両辺を q 乗して
$$\boldsymbol{2^p = 3^q} \qquad ⇨ ⑤$$
と変形できる。いま，2 は偶数であり 3 は奇数であるので，これを満たす自然数 p，q は存在しない。
　したがって，$\log_2 3$ は無理数であることがわかる。

◀$\log_2 3$ は無理数であることを証明するために，$\log_2 3$ を有理数であると仮定して矛盾することを示す方針で証明する。（「**研究**」参照）

◀2^p は偶数であり，3^q は奇数である。

(iii)　a，b を 2 以上の自然数とするとき，(ii)と同様に考えると，a と b の偶奇が異なれば
$$a^p = b^q$$
を満たす自然数 p，q は存在しないので，「**a と b のいずれか一方が偶数で，もう一方が奇数**ならば $\log_a b$ はつねに無理数である」ことがわかる。
⇨ ⑤

研究

(2)(ii)のように，ある命題を証明するのに，その命題が成り立たないと仮定して矛盾することを示し，そのことによって，もとの命題が成り立つことを証明する方法を**背理法**という。
本問では，$\log_2 3$ が無理数であることを証明するために，$\log_2 3$ が有理数であると仮定し，二つの自然数 p，q を用いて
$$\log_2 3 = \frac{p}{q}$$
と表せるとすると矛盾が生じることから，$\log_2 3$ が有理数でない（すなわち無理数である）ことを背理法によって証明している。

第２問

〔1〕

(1)　$y = f(x) = x^2(k-x)$ と x 軸（$y=0$）との共有点の x 座標は
$$x^2(k-x) = 0$$
より
$$x = 0,\ k$$
よって，$y = f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の座標は $(0,\ 0)$ と $\boldsymbol{(k,\ 0)}$ である。
⇨ ④
また
$$f(x) = x^2(k-x) = -x^3 + kx^2$$
より
$$\boldsymbol{f'(x) = -3x^2 + 2kx} = x(2k-3x)$$

であり，$k>0$ より $f(x)$ の増減は右の表のようになる。

x		0		$\frac{2}{3}k$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって

$\boldsymbol{x=0}$ のとき，$f(x)$ は極小値

$f(0)=\mathbf{0}$

をとる。　⇨ ⓪，⓪

$\boldsymbol{x=\frac{2}{3}k}$ のとき，$f(x)$ は極大値

$$f\left(\frac{2}{3}k\right)=\frac{4}{9}k^2\cdot\left(k-\frac{2}{3}k\right)=\boldsymbol{\frac{4}{27}k^3}$$

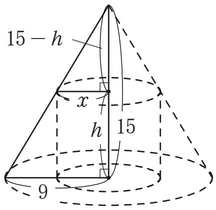
をとる。　⇨ ③，⑨

また，$\frac{2}{3}k<k$ より，$0<x<k$ の範囲において $x=\frac{2}{3}k$ のとき $f(x)$ は最大となることがわかる。

◀ $f'(x)=0$ の解は $x=0,\ \frac{2}{3}k$ であり，$k>0$ より $0<\frac{2}{3}k$ である。

◀ $f(0)=0^2\cdot(k-0)=0$

(2)　図のように円錐に内接する円柱の高さを h とおくと



$$x:9=(15-h):15$$

より

$$15x=9(15-h)$$

すなわち

$$h=15-\frac{5}{3}x$$

である。

◀底面の半径 x，高さ $15-h$ の円錐と，底面の半径 9，高さ 15 の円錐の相似比に着目した。

よって，円柱の体積 V を x の式で表すと

$$V=\pi x^2h=\pi x^2\left(15-\frac{5}{3}x\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{5}{3}\pi x^2(9-x)}\quad(0<x<9)$$

である。(1)の $f(x)$ において $k=9$ とすると

$$f(x)=x^2(9-x)$$

であり，このとき

$$V=\frac{5}{3}\pi f(x)$$

であるから，$0<x<9$ において V が最大となるのは，$f(x)$ が極大になる場合で

$$\boldsymbol{x}=\frac{2}{3}k=\frac{2}{3}\cdot 9=\mathbf{6}$$

のとき V は最大になることがわかる。

◀ V を $f(x)$ を用いて立式し，(1)の考察を利用する。

よって，V の最大値は

$$\frac{5}{3}\pi\cdot\frac{4}{27}k^3=\frac{5}{3}\pi\cdot\frac{4}{27}\cdot 9^3=\boldsymbol{180\pi}$$

である。

別解

(1)の $f'(x)$ は，数学 III で学習する積の微分法

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

を用いて

$$f'(x)=(x^2)'\cdot(k-x)+x^2\cdot(k-x)'=2x(k-x)+x^2\cdot(-1)$$
$$=-3x^2+2kx$$

のように計算できる。

〔2〕

(1)
$$\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx=\left[\frac{1}{10}x^2+3x\right]_0^{30}=\frac{1}{10}\cdot 30^2+3\cdot 30-0$$
$$=90+90$$
$$=\mathbf{180}$$

また，C を積分定数とすると
$$\int\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)dx=\frac{1}{300}x^3-\frac{1}{12}x^2+5x+C$$

(2)(i)　太郎さんは
$$f(x)=\frac{1}{5}+3\quad(x\geqq 0)$$
として考えた。

$S(t)$ について，(1)の計算過程を利用すると
$$S(t)=\int_0^t f(x)\,dx=\int_0^t\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx=\left[\frac{1}{10}x^2+3x\right]_0^t$$
$$=\frac{1}{10}t^2+3t$$

$S(t)=400$ となる t の値を求めると
$$\frac{1}{10}t^2+3t=400$$
$$t^2+30t-4000=0$$
$$(t-50)(t+80)=0$$
であり，$t>0$ より
$$t=50$$
よって，ソメイヨシノの開花日時は 2 月に入ってから **50 日後** となる。

⇨ ④

(ii)　花子さんは
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}x+3 & (0\leqq x\leqq 30)\\[2mm] \dfrac{1}{100}x^2-\dfrac{1}{6}x+5 & (x\geqq 30)\end{cases}$$
として考えた。

$x\geqq 30$ の範囲において $f(x)$ は増加するから
$$\int_{30}^{40}f(x)\,dx<\int_{40}^{50}f(x)\,dx$$
⇨ ⓪

であることがわかる。したがって
$$\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx=180$$
$$\int_{30}^{40}\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)dx=115$$
より
$$\int_0^{40}f(x)\,dx=\int_0^{30}f(x)\,dx+\int_{30}^{40}f(x)\,dx=180+115=295\ (<400)$$
であり
$$\int_{30}^{40}f(x)\,dx=115<\int_{40}^{50}f(x)\,dx$$
より
$$\int_0^{50}f(x)\,dx=\int_0^{40}f(x)\,dx+\int_{40}^{50}f(x)\,dx$$
$$>295+115=410\ (>400)$$
であるから，ソメイヨシノの開花日時は 2 月に入ってから **40 日後より後，かつ 50 日後より前**となる。 ⇨ ④

◀以下，積分区間を
$0\leqq x\leqq 30$
→ $0\leqq x\leqq 40$
→ $0\leqq x\leqq 50$
のように変えながら，定積分の値について考察していく方針である。

研究

(2)(ii)の問題文に与えられている情報を確認しておく。

(a) $0 \leqq x \leqq 30$ のときの $f(x)=\dfrac{1}{5}x+3$ と $x \geqq 30$ のときの $f(x)=\dfrac{1}{100}x^2-\dfrac{1}{6}x+5$ において，$x=30$ のときのそれぞれの右辺の値が一致することは

$$\frac{1}{5}\cdot 30+3=9$$

$$\frac{1}{100}\cdot 30^2-\frac{1}{6}\cdot 30+5=9$$

より確かめられる。

(b) $\displaystyle\int_{30}^{40}\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)dx=115$ となることは

$$\begin{aligned}&\int_{30}^{40}\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)dx\\&=\left[\frac{1}{300}x^3-\frac{1}{12}x^2+5x\right]_{30}^{40}\\&=\frac{1}{300}(40^3-30^3)-\frac{1}{12}(40^2-30^2)+5(40-30)\\&=\frac{1}{300}\cdot 37000-\frac{1}{12}\cdot 700+5\cdot 10\\&=\frac{370}{3}-\frac{175}{3}+50\\&=115\end{aligned}$$

より確かめられる。

(c) $x \geqq 30$ の範囲において $f(x)$ が増加することは

$$\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5=\frac{1}{100}\left(x^2-\frac{50}{3}x+500\right)$$

より，2 次関数 $\dfrac{1}{100}x^2-\dfrac{1}{6}x+5$ のグラフが下に凸の放物線で，放物線の軸は

$$x=\frac{25}{3}\ (<30)$$

であることより確かめられる。

研究

(2)(ii)において，ソメイヨシノの開花日時を求めるために，
$400-180-115=105$ より

$$\int_{40}^{t}\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)dx=105$$

となる t の値を求めようとすると

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\left[\frac{1}{300}x^3-\frac{1}{12}x^2+5x\right]_{40}^{t}\\&=\frac{1}{300}(t^3-40^3)-\frac{1}{12}(t^2-40^2)+5(t-40)\\&=\frac{1}{300}t^3-\frac{1}{12}t^2+5t-280\end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{300}t^3-\frac{1}{12}t^2+5t-280=105$$

すなわち

$$t^3-25t^2+1500t-115500=0$$

のような複雑な 3 次方程式を解かなければいけなくなる。したがって，本問では「解答」のように誘導にそって解くことが必要不可欠となる。

第３問

(1)　確率変数 X は正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うので，平均は m，標準偏差は σ である。ここで

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

とすると，確率変数 Z は平均 0，標準偏差 1 の標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

◀標準化された確率変数は標準正規分布に従う。

(i)　1 個のピーマンを無作為に抽出したとき，重さが m g 以上である確率 $P(X \geqq m)$ というのは，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数 Z が平均（すなわち 0）以上である確率ということである。つまり

$$\boldsymbol{P(X \geqq m)=P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geqq 0\right)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

である。

◀ $P(Z \geqq 0)=P(Z \leqq 0)=\frac{1}{2}$

(ii)　母集団から無作為に抽出された大きさ n の標本 X_1，X_2，…，X_n の標本平均を $\overline{X}$ とすると

◀母平均 m，母標準偏差 σ の母集団である。

$$\boldsymbol{E(\overline{X})=m}$$ ⇨ ④

$$\boldsymbol{\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$ ⇨ ②

となる。

確率 $P(-z_0 \leqq Z \leqq z_0)$ は $2\cdot P(0 \leqq Z \leqq z_0)$ と等しいので，**方針**において

$$P(-z_0 \leqq Z \leqq z_0)=0.901$$

のとき

$$P(0 \leqq Z \leqq z_0)=0.4505$$

であり，正規分布表より

◀ $\frac{0.901}{2}=0.4505$

$$\boldsymbol{z_0=1.65}$$

$n=400$，標本平均が 30.0 g，標本の標準偏差が 3.6 g のとき，n は十分に大きい値なので $\overline{X}$ は正規分布

$$N\left(30.0,\ \frac{3.6^2}{400}\right)$$

に従うとみなすことができる。そこで

$$Z=\frac{m-30.0}{\frac{3.6}{\sqrt{400}}}=\frac{m-30}{\frac{3.6}{20}}$$

とおくと

◀標準化。

$$-1.65 \leqq \frac{m-30}{\frac{18}{100}} \leqq 1.65$$

◀ $\frac{3.6}{20}=\frac{18}{100}$

$$\frac{18}{100}\times(-1.65) \leqq m-30 \leqq \frac{18}{100}\times 1.65$$

$$30-0.297 \leqq m \leqq 30+0.297$$

したがって，m の信頼度 90% の信頼区間は

$$29.703 \leqq m \leqq 30.297$$

よって，最も適当な選択肢は

$$\boldsymbol{29.7 \leqq m \leqq 30.3}$$ ⇨ ④

である。

(2)(i)　$m=30.0$ であり，(1)(i)より，$X \geqq 30$ である確率と $X \leqq 30$ である確率は $\frac{1}{2}$ で等しい。

したがって，無作為に 1 個抽出したピーマンが S サイズである確率は

$\dfrac{1}{2}$

よって，ピーマンを無作為に 50 個抽出したときの S サイズのピーマンの個数を表す確率変数 U_0 は二項分布 $B\left(50,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従うので，ピーマンを無作為に 50 個抽出したとき，**ピーマン分類法**で 25 袋作ることができる確率 p_0 は

$$\boldsymbol{p_0 = {}_{50}C_{25}\left(\frac{1}{2}\right)^{25} \times \left(1-\frac{1}{2}\right)^{50-25}}$$

◀25 袋作ることができるのは，50 個のうち，25 個が S サイズで 25 個が L サイズのとき。

(ii)　ピーマンを無作為に $(50+k)$ 個抽出したとき，S サイズのピーマンの個数を表す確率変数を U_k とすると，U_k は二項分布 $B\left(50+k,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う。ここで，U_k の平均を $E(U_k)$，分散を $V(U_k)$ とすると

$$E(U_k) = (50+k)\cdot\frac{1}{2}$$

$$V(U_k) = (50+k)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

であり，$(50+k)$ は十分に大きいので，U_k は近似的に正規分布

$$\boldsymbol{N\left(\frac{50+k}{2},\ \frac{50+k}{4}\right)}$$　⇨ ③，⑦

に従い

$$Y = \frac{U_k - \dfrac{50+k}{2}}{\sqrt{\dfrac{50+k}{4}}}$$

◀標準化。

とおくと，Y は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$25 \leqq U_k \leqq 25+k$ のとき

$$\frac{25-\dfrac{50+k}{2}}{\sqrt{\dfrac{50+k}{4}}} \leqq Y \leqq \frac{(25+k)-\dfrac{50+k}{2}}{\sqrt{\dfrac{50+k}{4}}}$$

$$-\frac{\dfrac{k}{2}}{\dfrac{\sqrt{50+k}}{2}} \leqq Y \leqq \frac{\dfrac{k}{2}}{\dfrac{\sqrt{50+k}}{2}}$$

$$-\frac{k}{\sqrt{50+k}} \leqq Y \leqq \frac{k}{\sqrt{50+k}}$$

よって，**ピーマン分類法**で，25 袋作ることができる確率を p_k とすると

$$\boldsymbol{p_k = P(25 \leqq U_k \leqq 25+k)}$$

$$\boldsymbol{= P\left(-\frac{k}{\sqrt{50+k}} \leqq Y \leqq \frac{k}{\sqrt{50+k}}\right)}$$　⇨ ⓪

となる。

$k=\alpha$，$\sqrt{50+k}=\beta$ とおくと，$\dfrac{\alpha}{\beta} \geqq 2$ のとき，$\alpha^2 \geqq 4\beta^2$ なので

$$k^2 \geqq 4(50+k)$$

$$k^2 - 4k - 200 \geqq 0$$

$$\{k-(2-2\sqrt{51})\}\{k-(2+2\sqrt{51})\} \geqq 0$$

$$k \leqq 2-2\sqrt{51},\quad k \geqq 2+2\sqrt{51}$$

$\sqrt{51}=7.14$ であるから

$$k \leqq -12.28,\quad k \geqq 16.28$$

よって，これを満たす最小の自然数 k すなわち k_0 は

$$\boldsymbol{k_0 = 17}$$

であることがわかる。

別解

$k^2 \geqq 4(50+k)$ は次のように解いてもよい。

$$k^2 \geqq 4(50+k)$$
$$(k-2)^2 \geqq 204$$

これを満たす最小の自然数 k すなわち k_0 は，$14^2=196$，$15^2=225$ に注意して

$$k_0-2=15$$

よって

$$k_0=17$$

第４問

(1)　参考図より２年目の終わりの預金は

$$1.01\{1.01(10+p)+p\}$$

であるから

$$\boldsymbol{a_3=1.01\{1.01(10+p)+p\}+p} \quad ⇨ ②$$

同様に考えると，すべての自然数 n について

$$\boldsymbol{a_{n+1}=1.01a_n+p} \quad ⇨ ⓪，③$$

が成り立つ。方程式

$$x=1.01x+p$$

を解くと

$$x=-100p$$

であるから

$$\boldsymbol{a_{n+1}+100p=1.01(a_n+100p)} \quad ⇨ ④，⓪$$

と変形できる。

方針２の場合，１年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには利息が $(n-1)$ 回つくので

$$\boldsymbol{p\times 1.01^{n-1}}\ (万円) \quad ⇨ ②$$

になり，２年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには利息が $(n-2)$ 回つくので

$$\boldsymbol{p\times 1.01^{n-2}}\ (万円) \quad ⇨ ③$$

になる。３年目以降に入金した p 万円も同様である。これより

$$\begin{aligned}a_n &= 10\times 1.01^{n-1}+p\times 1.01^{n-1}+p\times 1.01^{n-2}+\cdots+p\times 1.01^1+p\\ &= 10\times 1.01^{n-1}+p(1.01^{n-1}+1.01^{n-2}+\cdots+1.01^1+1.01^0)\\ &= 10\times 1.01^{n-1}+\boldsymbol{p\sum_{k=1}^{n}1.01^{k-1}} \quad ⇨ ②\end{aligned}$$

となることがわかる。ここで

$$\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{1.01^{k-1}}=\frac{1\cdot(1.01^n-1)}{1.01-1}=\boldsymbol{100(1.01^n-1)} \quad ⇨ ①$$

◀初項１，公比 1.01，項数 n の等比数列の和。

となる。

(2)　10 年目の終わりの預金は $1.01a_{10}$ 万円であるから，10 年目の終わりの預金が 30 万円以上であることを不等式を用いて表すと

$$\boldsymbol{1.01a_{10}\geqq 30} \quad ⇨ ③$$

となる。方針２より

$$a_{10}=10\times 1.01^9+p\times 100(1.01^{10}-1)$$

◀ $a_n=10\times 1.01^{n-1}+p\times 100(1.01^n-1)$

であり

$$1.01a_{10}=10\times 1.01^{10}+p\times 101(1.01^{10}-1)$$

であるから，不等式を p について解くと

$$1.01a_{10} \geqq 30$$
$$10 \times 1.01^{10} + p \times 101(1.01^{10} - 1) \geqq 30$$
$$p \times 101(1.01^{10} - 1) \geqq 30 - 10 \times 1.01^{10}$$
$$\boldsymbol{p \geqq \frac{30 - 10 \times 1.01^{10}}{101(1.01^{10} - 1)}}$$

となる。

(3)　**方針２**と同様に考える。

$$a_n = \boxed{10} \times 1.01^{n-1} + p\sum_{k=1}^{n} 1.01^{k-1}$$

において，$p\sum_{k=1}^{n} 1.01^{k-1}$ は１年目の入金を始める前の預金と関係なく，１年目の入金を始める前の預金は $\boxed{}$ の部分である。したがって，１年目の入金を始める前における花子さんの預金が 13 万円の場合，n 年目の初めの預金 b_n 万円は

$$b_n = 13 \times 1.01^{n-1} + p\sum_{k=1}^{n} 1.01^{k-1}$$

　よって，n 年目の初めの預金は a_n 万円よりも

$$b_n - a_n = 13 \times 1.01^{n-1} - 10 \times 1.01^{n-1} = \boldsymbol{3 \times 1.01^{n-1}}\ （万円）$$　⇨ ⑧

多い。

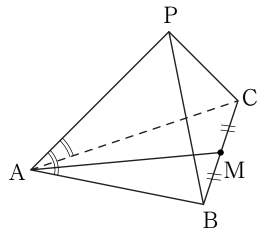
第５問

(1)　M は辺 BC の中点なので

$$\overrightarrow{\mathbf{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{AC}}$$

また，$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{PAC}=\theta$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta$$



であるから

$$\frac{\overrightarrow{\mathbf{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AB}}}{|\overrightarrow{\mathbf{AP}}||\overrightarrow{\mathbf{AB}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathbf{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AC}}}{|\overrightarrow{\mathbf{AP}}||\overrightarrow{\mathbf{AC}}|}=\cos\boldsymbol{\theta}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。　⇨ ①

(2)　$\theta=45^\circ$，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=3\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=3$ のとき

$$\overrightarrow{\mathbf{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\overrightarrow{\mathbf{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AC}}=3\sqrt{2}\cdot3\cos45^\circ=9\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

D は直線 AM 上の点であるから，a を実数として $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=a\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ とおくと，(1)より

$$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=a\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{a}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

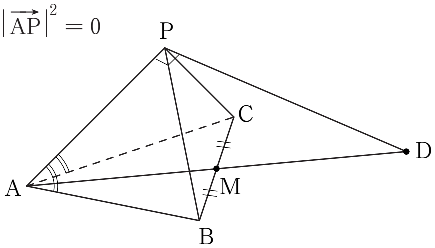
◀ $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より。

$\angle\mathrm{APD}=90^\circ$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\left\{\frac{a}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right\}=0$$
$$\frac{a}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}-|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=0$$
$$\frac{a}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})-|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=0$$

② と $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=3\sqrt{2}$ より

$$\frac{a}{2}(9+9)-(3\sqrt{2})^2=0$$
$$a=2$$



よって

$$\overrightarrow{\mathbf{AD}}=2\,\overrightarrow{\mathbf{AM}}$$

◀ $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=a\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ より。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ で定まる点を Q とおく。

(i)　(2)と同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

◀ $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より。

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

よって

$$\overrightarrow{\mathbf{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AC}}=\overrightarrow{\mathbf{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AP}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

である。　⇨ ⓪

さらに ① に注意すると，③より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$$

両辺を $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\ (\neq0)$ で割って

$$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|\cos\boldsymbol{\theta}+|\overrightarrow{\mathbf{AC}}|\cos\boldsymbol{\theta}=|\overrightarrow{\mathbf{AP}}|\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

が成り立つ。　⇨ ③

(ii)　k を正の実数とし，$k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つとするとき，①より

$$k\left(|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta\right)=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta$$

両辺を $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta\ (\neq 0)$ で割って

$$\boldsymbol{k}|\overrightarrow{\mathbf{AB}}| = |\overrightarrow{\mathbf{AC}}| \qquad ⇨ ⓪$$

が成り立つ。

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であるとき，③であり

$$k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

$$(1+k)\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$$

$$(1+k)|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$$

両辺を $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\ (\neq 0)$ で割って

$$(1+k)|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}| \quad \cdots\cdots ⑤$$

また，点 B から直線 AP に下ろした垂線と直線 AP との交点を B′ とし，点 C から直線 AP に下ろした垂線と直線 AP との交点を C′ とすると

$$\mathrm{AB'} = \mathrm{AB}\cos\theta \quad \cdots\cdots ⑥$$

$$\mathrm{AC'} = \mathrm{AC}\cos\theta \quad \cdots\cdots ⑦$$

⑤，⑥より

$$(1+k)\mathrm{AB'} = \mathrm{AP}$$

$$\mathrm{AB'} : \mathrm{AP} = 1 : (1+k)$$

すなわち

$$\mathrm{AB'} : \mathrm{B'P} = 1 : k$$

◀ $\mathrm{B'P} = \mathrm{AP} - \mathrm{AB'}$

AC′ についても同様にして

$$\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$$

ゆえに

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$$

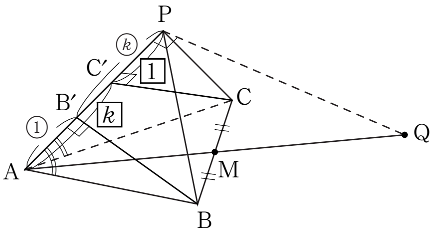
⑦より

$$\mathrm{AC'} : \mathrm{AP} = 1 : \left(1+\frac{1}{k}\right) = k : (1+k)$$

すなわち

$$\mathrm{AC'} : \mathrm{C'P} = k : 1$$

◀ $\mathrm{C'P} = \mathrm{AP} - \mathrm{AC'}$



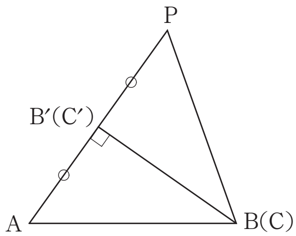
となるので，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であることは，**B′ と C′ が線分 AP をそれぞれ $\boldsymbol{1:k}$ と $\boldsymbol{k:1}$ に内分する点であること**と同値である。 ⇨ ④

特に $k=1$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ であり

$$\mathrm{AB'} : \mathrm{B'P} = 1 : 1$$

$$\mathrm{AC'} : \mathrm{C'P} = 1 : 1$$

であるから，B′，C′ は線分 AP の中点である。



よって，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であることは，**△PAB と △PAC がそれぞれ BP = BA，CP = CA を満たす二等辺三角形であること**と同値である。 ⇨ ②