第 1 問

〔1〕

$$2x^2+(4c-3)x+2c^2-c-11=0 \quad \cdots\cdots ①$$

(1)　$c=1$ のとき，①の左辺を因数分解すると

$$\begin{aligned}2x^2+(4\cdot1-3)x+2\cdot1^2-1-11&=2x^2+x-10\\&=(\mathbf{2}x+\mathbf{5})(x-\mathbf{2})\end{aligned}$$

よって，①の解は

$$x=-\frac{5}{2},\ 2$$

(2)　$c=2$ のとき，①は

$$2x^2+(4\cdot2-3)x+2\cdot2^2-2-11=0$$

$$2x^2+5x-5=0$$

よって，①の解は，解の公式より

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot2\cdot(-5)}}{2\cdot2}=\frac{-\mathbf{5}\pm\sqrt{\mathbf{65}}}{\mathbf{4}}$$

これより，大きい方の解は

$$\alpha=\frac{\sqrt{65}-5}{4}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{5}{\alpha}&=5\cdot\frac{4}{\sqrt{65}-5}=\frac{20(\sqrt{65}+5)}{(\sqrt{65}-5)(\sqrt{65}+5)}\\&=\frac{20(\sqrt{65}+5)}{65-25}\\&=\frac{\mathbf{5}+\sqrt{\mathbf{65}}}{\mathbf{2}}\end{aligned}$$

ここで，$\sqrt{64}<\sqrt{65}<\sqrt{81}$ より

$$8<\sqrt{65}<9$$

$$\frac{8+5}{2}<\frac{\sqrt{65}+5}{2}<\frac{9+5}{2}$$

◀辺々に 5 を加えて 2 で割った。

$$(6<)\ 6.5<\frac{5}{\alpha}=\frac{5+\sqrt{65}}{2}<7$$

よって，$m<\dfrac{5}{\alpha}<m+1$ を満たす整数 m は **6** である。

(3)　①の解は，解の公式より

$$\begin{aligned}x&=\frac{-(4c-3)\pm\sqrt{(4c-3)^2-4\cdot2(2c^2-c-11)}}{2\cdot2}\\&=\frac{-4c+3\pm\sqrt{-16c+97}}{4}\end{aligned}$$

ここで，$D=-16c+97$ とおくと，①の解が異なる二つの有理数であるのは，D が正の平方数となるときである。$D>0$ より

$$-16c+97>0$$

$$c<\frac{97}{16}=6+\frac{1}{16}$$

c は正の整数なので

$$c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

である。この c の値それぞれに対して

$$D=81(=9^2),\ 65,\ 49(=7^2),\ 33,\ 17,\ 1(=1^2)$$

であるから，①の解が異なる二つの有理数であるような正の整数 c は，1，3，6 の **3** 個 である。

〔2〕

(1)　$0^\circ < A < 180^\circ$，$\cos A = \dfrac{3}{5}$ より

$$\mathbf{\sin A} = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \dfrac{4}{5}$$

◀ $\sin A > 0$

よって

$$\triangle\mathbf{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot \dfrac{4}{5} = 12$$

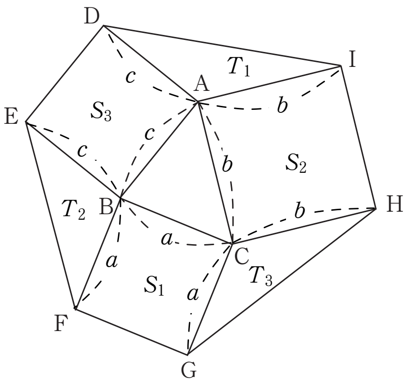
次に

$$\angle\mathrm{IAD} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + A) = 180^\circ - A$$

より，$\sin\angle\mathrm{IAD} = \sin(180^\circ - A) = \sin A$ であり，$\mathrm{AI} = \mathrm{AC} = b$，$\mathrm{AD} = \mathrm{AB} = c$ であるから

$$\triangle\mathbf{AID} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AI}\cdot\mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{IAD} = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \triangle\mathrm{ABC} = 12$$

(2)



$S_1 = a^2$，$S_2 = b^2$，$S_3 = c^2$ より

$$S_1 - S_2 - S_3 = a^2 - b^2 - c^2$$

また，△ABC において，余弦定理より

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A$$

(i)　$0^\circ < A < 90^\circ$ のとき，$\cos A > 0$ であり，$b > 0$，$c > 0$ より

$$-2bc\cos A < 0$$

したがって

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A < 0$$

よって

$$S_1 - S_2 - S_3 < 0$$　⇨ ②

(ii)　$A = 90^\circ$ のとき，$\cos A = 0$ より

$$a^2 - b^2 - c^2 = 0$$

よって

$$S_1 - S_2 - S_3 = 0$$　⇨ ⓪

(iii)　$90^\circ < A < 180^\circ$ のとき，$\cos A < 0$ より，$-2bc\cos A > 0$ であるから

$$a^2 - b^2 - c^2 > 0$$

よって

$$S_1 - S_2 - S_3 > 0$$　⇨ ①

(3)　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ であるから，(1)と同様に

考えて

$$T_1 = \triangle \mathrm{AID} = \triangle \mathrm{ABC}$$

$$T_2 = \triangle \mathrm{BEF} = \frac{1}{2}\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BF}\sin\angle\mathrm{EBF} = \frac{1}{2}ca\sin B = \triangle \mathrm{ABC}$$

$$T_3 = \triangle \mathrm{CGH} = \frac{1}{2}\mathrm{CG}\cdot\mathrm{CH}\sin\angle\mathrm{GCH} = \frac{1}{2}ab\sin C = \triangle \mathrm{ABC}$$

◀ $\angle\mathrm{EBF} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ - B) = 180^\circ - B$
より
$\sin\angle\mathrm{EBF} = \sin(180^\circ - B) = \sin B$

◀ $\angle\mathrm{GCH} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ - C) = 180^\circ - C$
より
$\sin\angle\mathrm{GCH} = \sin(180^\circ - C) = \sin C$

よって，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ の値に関係なく，$\boldsymbol{T_1 = T_2 = T_3}$ ⇨ ③

(4)　$0^\circ < A < 90^\circ$ のとき，$\angle\mathrm{IAD} = 180^\circ - A$ より，$90^\circ < \angle\mathrm{IAD} < 180^\circ$ であるから

$$\cos A > 0,\quad \cos\angle\mathrm{IAD} < 0$$

したがって，△AID と △ABC において，余弦定理より

$$\mathrm{ID}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle\mathrm{IAD} > b^2 + c^2$$

$$\mathrm{BC}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A < b^2 + c^2$$

よって，$\mathrm{ID}^2 > \mathrm{BC}^2$ であるから

ID ＞ BC ⇨ ②

次に，△ABC，△AID，△BEF，△CGH の外接円の半径をそれぞれ R，R_1，R_2，R_3 とする。

$\angle\mathrm{IAD} = 180^\circ - A$ と同様に，$\angle\mathrm{EBF} = 180^\circ - B$，$\angle\mathrm{GCH} = 180^\circ - C$ であり，それぞれの三角形において，正弦定理より

$$2R = \frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \frac{\mathrm{CA}}{\sin B} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin C}$$

$$2R_1 = \frac{\mathrm{ID}}{\sin\angle\mathrm{IAD}} = \frac{\mathrm{ID}}{\sin A}$$

$$2R_2 = \frac{\mathrm{EF}}{\sin\angle\mathrm{EBF}} = \frac{\mathrm{EF}}{\sin B}$$

$$2R_3 = \frac{\mathrm{GH}}{\sin\angle\mathrm{GCH}} = \frac{\mathrm{GH}}{\sin C}$$

ここで，$0^\circ < A < B < C < 90^\circ$ のとき，ID ＞ BC と同様に考えると，EF ＞ CA，GH ＞ AB であるから，正弦定理の式より

$$R_1 > R,\quad R_2 > R,\quad R_3 > R$$

よって，$0^\circ < A < 90^\circ$ のとき

(△AID の外接円の半径) ＞ (△ABC の外接円の半径) ⇨ ②

であり，$0^\circ < A < B < C < 90^\circ$ のとき，外接円の半径が最も小さい三角形は **△ABC** である。 ⇨ ⓪

◀ R_1，R について
$\mathrm{ID} = 2\sin A\cdot R_1$
$\mathrm{BC} = 2\sin A\cdot R_1$
ID ＞ BC，$\sin A > 0$ より
$R_1 > R$
R_2，R について
$\mathrm{EF} = 2\sin B\cdot R_2$
$\mathrm{CA} = 2\sin B\cdot R_2$
EF ＞ CA，$\sin B > 0$ より
$R_2 > R$
R_3，R について
$\mathrm{GH} = 2\sin C\cdot R_3$
$\mathrm{AB} = 2\sin C\cdot R_3$
GH ＞ AB，$\sin C > 0$ より
$R_3 > R$

　$0^\circ < A < B < 90^\circ < C$ のとき，$0^\circ < A < B < 90^\circ$ より

$$R_1 > R,\quad R_2 > R$$

$\angle\mathrm{GCH} = 180^\circ - C$ より，$90^\circ < C < 180^\circ$ のとき

$$0^\circ < \angle\mathrm{GCH} = 180^\circ - C < 90^\circ$$

であるから

$$\cos C < 0,\quad \cos\angle\mathrm{GCH} > 0$$

したがって，ID ＞ BC を求めたときと同様に考えて

$$\mathrm{GH}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle\mathrm{GCH} < a^2 + b^2$$

$$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C > a^2 + b^2$$

であるから

$\mathrm{GH} < \mathrm{AB}$

これと，正弦定理の式より

$R_3 < R$

よって，$0° < A < B < 90° < C$ のとき，外接円の半径が最も小さい三角形は△**CGH** である。 ⇨ ③

第２問

〔1〕

(1)　1秒あたりの進む距離，すなわち平均速度は

$$\begin{aligned}&(1\text{ 歩あたりの進む距離})\times(1\text{ 秒あたりの歩数})\\ &=(\text{ストライド})\times(\text{ピッチ})\\ &=\boldsymbol{xz}\,(\mathrm{m}/\text{秒})\end{aligned}$$ ⇨ ②

よって

$$(\text{タイム})=\frac{100}{xz}\,(\text{秒})$$

(2)　ストライド x が 0.05 大きくなるごとに，ピッチ z は 0.1 ずつ小さくなっているから，z は x の1次関数と考えられる。

よって，$x=2.05$ のとき，$z=4.70$ であり，$x=2.10$ のとき，$z=4.60$ であるから

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}&=\frac{4.60-4.70}{2.10-2.05}(x-2.10)+4.60\\ &=\frac{-0.10}{0.05}(x-2.10)+4.60\\ &=-2(x-2.10)+4.60\\ &=-2x+8.80\\ &=\boldsymbol{-2x+\frac{44}{5}}\end{aligned}$$ ……………… ②

ピッチ z の最大値が 4.80 より

$z \leqq 4.80$

②より

$-2x+8.8 \leqq 4.80$

$x \geqq 2.00$

ストライド x の最大値が 2.40 より

$x \leqq 2.40$

よって

$\boldsymbol{2.00 \leqq x \leqq 2.40}$

ここで，$y=xz$ とおくと，②より

$$y=x\left(-2x+\frac{44}{5}\right)=-2x^2+\frac{44}{5}x=-2\left(x-\frac{11}{5}\right)^2+\frac{242}{25}$$

である。

よって，$2.00 \leqq \dfrac{11}{5} \leqq 2.40$ より，y は $\boldsymbol{x=2.20}$ のとき，最大値 $\dfrac{242}{25}$ をとる。

◀ $\dfrac{11}{5}=2.20$

このとき，ピッチ z は②より

$$z=-2\cdot\frac{11}{5}+\frac{44}{5}=\frac{22}{5}=\boldsymbol{4.40}$$

また，このときのタイムは

$$\frac{100}{xz}=\frac{100}{y}=\frac{100}{\frac{242}{25}}=\frac{1250}{121}\fallingdotseq\boldsymbol{10.331}$$ ⇨ ③

〔2〕

(1)　データの大きさが 40 であるから，第 1 四分位数は小さい方から 10 番目と 11 番目の値の平均値であり

$$\frac{13+13}{2}=13$$

第 3 四分位数は小さい方から 30 番目と 31 番目の値の平均値であり

$$\frac{25+25}{2}=25$$

よって，四分位範囲は

$$25-13=12$$

また

$$(\text{第 1 四分位数})-1.5\times(\text{四分位範囲})=13-1.5\times12=-5$$

$$(\text{第 3 四分位数})+1.5\times(\text{四分位範囲})=25+1.5\times12=43$$

より，外れ値は 43 km 以上のすべての値である。

◀データに含まれる値は正の値のみであるから，-5 以下の値は存在しない。

よって，外れ値の個数は **3** である。

◀「47」「48」「56」が外れ値である。

(2)(i)　1 km あたりの所要時間は，図 1 において各点と原点を結ぶ直線の傾きによって求められる。

◀ $(\text{傾き})=\dfrac{\text{所要時間（分）}}{\text{移動距離（km）}}$

よって，1 km あたりの所要時間が最も小さい点は D であり，その大きさはおよそ

$$\frac{10}{15}\fallingdotseq0.67$$

この条件を満たすのは ⓪，② である。

さらに，1 km あたりの所要時間が最も大きい点は B であり，その大きさはおよそ

$$\frac{36}{6}=6$$

この条件を満たすのは ①，②，④ である。

以上より，条件を満たす箱ひげ図は ② である。　⇨ ②

次に，箱ひげ図 ② において，外れ値は上位 2 個の値であるから，**A** と **B** である。　⇨ ⓪，①

◀A～H のうち，それぞれの点と原点を通る直線の傾きが大きい点を考える。

(ii)　新空港の移動距離，所要時間，費用はすべて，40 の国際空港の平均値と等しい。

(I)について，図 2 より，日本の四つの空港の中には，費用が 950 よりも高いものも，所要時間が 38 よりも短いものもある。したがって，誤り。

(II)について，40 の国際空港の移動距離のデータを

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{40}$$

とし，このデータの分散を σ^2 とすると

$$\sigma^2=\frac{(x_1-22)^2+(x_2-22)^2+\cdots+(x_{40}-22)^2}{40}$$

一方，新空港を加えたあとの 41 個の値からなるデータの平均は

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{40}+22}{41}=\frac{22\cdot40+22}{41}=22$$

◀新空港を除く 40 の国際空港の移動距離の平均値は 22 であるから

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{40}}{40}=22$$

より

$$x_1+x_2+\cdots+x_{40}=22\cdot40$$

であるから，新空港を加えたあとの 41 個の値からなるデータの分散は

$$\frac{(x_1-22)^2+(x_2-22)^2+\cdots+(x_{40}-22)^2+(22-22)^2}{41}$$

$$=\frac{40\sigma^2+(22-22)^2}{41}=\frac{40}{41}\sigma^2$$

より，σ^2 と異なる。すなわち，新空港を加える前後で移動距離の標準偏差は変化する。したがって，誤り。

◀標準偏差は，分散の正の平方根である。

(Ⅲ)について，(Ⅱ)における分散の計算と同様にすると，新空港を加えたあとの移動距離，所要時間，費用の分散は，どれも新空港を加える前の $\dfrac{40}{41}$ 倍になる。よって，それぞれの標準偏差は，どれも新空港を加える前の $\sqrt{\dfrac{40}{41}}$ 倍になる。

また，40 の国際空港の所要時間のデータを

y_1，y_2，y_3，…，y_{40}

とし，40 の国際空港の移動距離と所要時間の共分散を s_{xy} とすると

$$s_{xy}=\frac{(x_1-22)(y_1-38)+(x_2-22)(y_2-38)+\cdots+(x_{40}-22)(y_{40}-38)}{40}$$

であり，新空港を加えたあとの移動距離と所要時間の共分散は

$$\frac{(x_1-22)(y_1-38)+(x_2-22)(y_2-38)+\cdots+(x_{40}-22)(y_{40}-38)+(22-22)(38-38)}{41}$$

$$=\frac{40s_{xy}+(22-22)(38-38)}{41}$$

$$=\frac{40}{41}s_{xy}$$

◀移動距離と同様に，所要時間の平均も新空港を加える前後で変化しない。

同様に，移動距離と費用，所要時間と費用の共分散も，新空港を加えることによって $\dfrac{40}{41}$ 倍になる。

よって，移動距離，所要時間，費用のうち，どの二つについての相関係数も，新空港を加えることによって

$$\frac{\frac{40}{41}}{\sqrt{\frac{40}{41}}\cdot\sqrt{\frac{40}{41}}}=1\ (\text{倍})$$

◀二つの変量 x，y について，x の標準偏差を s_x，y の標準偏差を s_y，x と y の共分散を s_{xy} とすると，x と y の相関係数は $\dfrac{s_{xy}}{s_x\cdot s_y}$

になる。したがって，正しい。

以上より，正誤の組合せとして正しいものは ⑥ である。 ⇨ ⑥

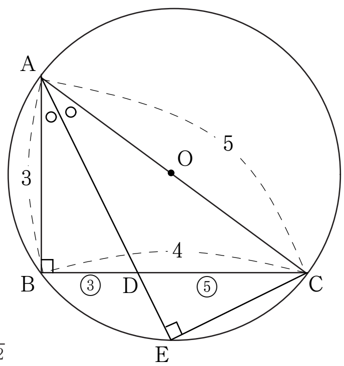
(3) **実験結果**より，30 枚の硬貨のうち 20 枚以上が表となった割合は

$$3.2+1.4+1.0+0.0+0.1+0.0+0.1+0.0+0.0+0.0+0.0=\mathbf{5.8}\ (\%)$$

である。これを，30 人のうち 20 人以上が「便利だと思う」と回答する確率とみなすと，この確率が 5% 以上であるから，**方針**に従うと，仮説は**誤っているとは判断されず**，したがって，P 空港は便利だと思う人の方が**多いとはいえない**。 ⇨ ①，①

◀仮説は“「便利だと思う」人と「便利だと思わない」人の割合が等しい”である。

第３問



AD は ∠BAC の二等分線だから，三角形の内角の二等分線と比の定理より

$$BD:DC=AB:AC=3:5$$

よって

$$\mathbf{BD}=\frac{3}{3+5}BC=\frac{3}{8}\cdot 4=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

ここで，$3^2+4^2=5^2$ より，$AB^2+BC^2=AC^2$ が成立するので，△ABC は ∠B = 90° の直角三角形である。

よって，△ABD において，三平方の定理より

$$\mathbf{AD}=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$=\mathbf{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$$

次に，△ABC の斜辺 AC は，外接円 O の直径だから，直径と円周角の関係より

$\angle \mathrm{AEC} = 90°$

△AEC と △ABD において

$\angle \mathrm{AEC} = \angle \mathrm{ABD} (= 90°)$

AE は ∠BAC の二等分線であるから

$\angle \mathrm{EAC} = \angle \mathrm{BAD}$

したがって，2 組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle \mathrm{AEC} \backsim \triangle \mathrm{ABD}$

△ABD の 3 辺の比は

$\mathrm{AB} : \mathrm{BD} : \mathrm{AD} = 3 : \dfrac{3}{2} : \dfrac{3\sqrt{5}}{2} = 2 : 1 : \sqrt{5}$

であるから，△AEC の 3 辺の比は

$\mathrm{AE} : \mathrm{EC} : \mathrm{AC} = 2 : 1 : \sqrt{5}$

よって

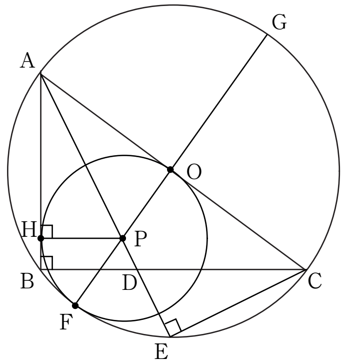
$\mathbf{AE} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{AC} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \cdot 5 = \mathbf{2\sqrt{5}}$

また，円 P と辺 AB の接点が H であるから，PH の長さは円 P の半径 r である。

△AHP と △ABD において

$\angle \mathrm{AHP} = \angle \mathrm{ABD} (= 90°)$

$\angle \mathrm{HAP} = \angle \mathrm{BAD}$



したがって，2 組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle \mathrm{AHP} \backsim \triangle \mathrm{ABD}$

△ABD の 3 辺の比は

$\mathrm{AB} : \mathrm{BD} : \mathrm{AD} = 2 : 1 : \sqrt{5}$

であるから，△AHP の 3 辺の比は

$\mathrm{AH} : \mathrm{HP} : \mathrm{AP} = 2 : 1 : \sqrt{5}$

よって

$\mathrm{AH} = \dfrac{2}{1}\mathrm{HP} = 2r$

$\mathbf{AP} = \dfrac{\sqrt{5}}{1}\mathrm{HP} = \boldsymbol{\sqrt{5}r}$

点 F における円 O の接線と円 P の接線は一致し，点 P を通りこの接線に垂直な直線は円 O と円 P の中心を通る。よって，O，P，F，G は同一直線上にあり，FG は円 O の直径になる。したがって

◀円 P と円 O の共通接線を ℓ とすると，直線 FP と直線 FO は，どちらも点 F を通り ℓ に垂直な直線であるから，一致する。

$\mathrm{FG} = \mathrm{AC} = 5$

また，PF は円 P の半径であるから，PF $= r$ である。

よって

$\mathrm{PE} = \mathrm{AE} - \mathrm{AP} = 2\sqrt{5} - \sqrt{5}r$

$\mathbf{PG} = \mathrm{FG} - \mathrm{PF} = \boldsymbol{5 - r}$

ここで，円 O において，方べきの定理により

$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PE} = \mathrm{PF} \cdot \mathrm{PG}$

したがって

$\sqrt{5}r\left(2\sqrt{5} - \sqrt{5}r\right) = r(5 - r)$

$r \neq 0$ より

$\sqrt{5}\left(2\sqrt{5} - \sqrt{5}r\right) = 5 - r$

$10 - 5r = 5 - r$

$\boldsymbol{r = \dfrac{5}{4}}$

よって

$$\mathbf{AH} = 2r = 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$$

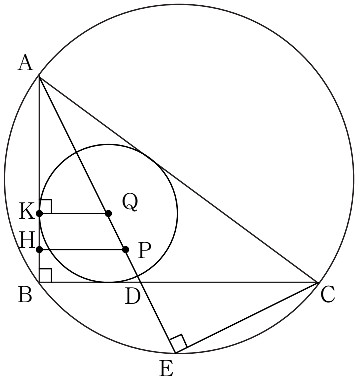
△ABC の内接円 Q の半径を x とすると

$$(\triangle\mathrm{ABC}\ \text{の面積}) = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot x + \frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot x + \frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot x$$
$$= \frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})x$$

であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = \frac{x}{2}(3+4+5)$$
$$x = 1$$

円 Q と辺 AB の接点を K とする。KQ は内接円 Q の半径なので，KQ = 1 である。また，AD は ∠A の二等分線であり，内心は三角形の内角の二等分線の交点であるから，△ABC の内心 Q は辺 AD 上にある。



△AKQ と △ABD において

$$\angle\mathrm{AKQ} = \angle\mathrm{ABD}(=90^\circ)$$
$$\angle\mathrm{KAQ} = \angle\mathrm{BAD}$$

したがって，2 組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle\mathrm{AKQ} \backsim \triangle\mathrm{ABD}$$

△ABD の 3 辺の比は，AB : BD : AD = 2 : 1 : $\sqrt{5}$ だから，△AKQ の 3 辺の比は

$$\mathrm{AK} : \mathrm{KQ} : \mathrm{AQ} = 2 : 1 : \sqrt{5}$$

よって

$$\mathbf{AQ} = \frac{\sqrt{5}}{1}\mathrm{KQ} = \sqrt{5}\cdot 1 = \sqrt{5}$$

ここで

$$\mathrm{AH}\cdot\mathrm{AB} = \frac{5}{2}\cdot 3 = \frac{15}{2}$$
$$\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AD} = \sqrt{5}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{15}{2}$$

◀H，B，D，Q が同一円周上にあるかを判断する。AH，AB，AD，AQ が求められているので，方べきの定理の逆を使う方針で考える。

より

$$\mathrm{AH}\cdot\mathrm{AB} = \mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AD}$$

したがって，方べきの定理の逆により，4 点 H，B，D，Q は同一円周上にある。

また

$$\mathrm{AH}\cdot\mathrm{AB} = \frac{15}{2}$$
$$\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AE} = \sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5} = 10$$

より

$$\mathrm{AH}\cdot\mathrm{AB} \neq \mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AE}$$

したがって，4 点 H，B，E，Q は同一円周上にはない。

よって，(a) は正しく，(b) は誤りである。 ⇨ ①

第 4 問

(1) 箱 A において，3 回中ちょうど 1 回当たる確率は，当たりくじを引くのが何回目であるかが ${}_3\mathrm{C}_1$ 通りあり，そのそれぞれについて確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

であるから

$$_3C_1\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

箱Bにおいて，3回中ちょうど1回当たる確率も同様に

$$_3C_1\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$$

次に，箱Aにおいて，3回中ちょうど2回当たる確率は

$$_3C_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$$

箱Aにおいて，3回中ちょうど3回当たる確率は

$$_3C_3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

であるから，箱Aにおいて，3回引いたときに当たりくじを引く回数の期待値は

$$1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

◀当たりくじを引く回数を X とすると

X	0	1	2	3	計
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

となる。X は 0 となる場合もあるが，期待値を求める際には考えなくてよい。

また，箱Bにおいて，3回中ちょうど2回当たる確率は

$$_3C_2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{6}{27}$$

箱Bにおいて，3回中ちょうど3回当たる確率は

$$_3C_3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

であるから，箱Bにおいて，3回引いたときに当たりくじを引く回数の期待値は

$$1\cdot\frac{12}{27}+2\cdot\frac{6}{27}+3\cdot\frac{1}{27}=1$$

◀当たりくじを引く回数を Y とすると

Y	0	1	2	3	計
確率	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	1

別解

箱A，箱Bからくじを1回引くとき，当たりくじを引く回数の期待値はそれぞれ $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$ である。この試行を3回行うとき，それぞれの試行は独立であるから，箱Aにおいて，3回引いたときに当たりくじを引く回数の期待値は

$$3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

箱Bにおいて，3回引いたときに当たりくじを引く回数の期待値は

$$3\cdot\frac{1}{3}=1$$

のように求めることもできる。

◀数学Bで学習する「二項分布の平均」の考え方。

(2)　(1)より

$$P(A\cap W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{16}$$

$$P(B\cap W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$

であるから

$$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)=\frac{3}{16}+\frac{2}{9}=\frac{59}{144}$$

◀W が起こるとき，A と B は必ずどちらか一方のみが起こる。

よって，3回中ちょうど1回当たったとき，選んだ箱がAである条件付き確率 $P_W(A)$ は

$$P_W(A)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{59}{144}}=\frac{27}{59}$$

また，3回中ちょうど1回当たったとき，選んだ箱がBである条件付き確率 $P_W(B)$ は

$$P_W(B)=1-P_W(A)=1-\frac{27}{59}=\frac{32}{59}$$

◀ $P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)$ より

$$1=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}+\frac{P(B\cap W)}{P(W)}=P_W(A)+P_W(B)$$

(X) の場合について，花子さんが選んだ箱が B であるとき，太郎さんが選んだ箱も B であるから，花子さんが選んだ箱が B で，かつ，花子さんが 3 回引いてちょうど 1 回当たる事象の起こる確率は

$$\boldsymbol{P_W(B) \times P(B_1)}$$ ⇨ ③

と表せる。

箱 A において 3 回引いてちょうど 2 回当たる事象を A_2，3 回とも当たる事象を A_3 と表し，箱 B において 3 回引いてちょうど 2 回当たる事象を B_2，3 回とも当たる事象を B_3 と表す。

このとき，(X) の場合の当たりくじを引く回数の期待値を計算する式は

$$\begin{aligned}
&1\cdot P_W(A)\cdot P(A_1)+1\cdot P_W(B)\cdot P(B_1)\\
&\quad +2\cdot P_W(A)\cdot P(A_2)+2\cdot P_W(B)\cdot P(B_2)\\
&\qquad +3\cdot P_W(A)\cdot P(A_3)+3\cdot P_W(B)\cdot P(B_3)\\
&=P_W(A)\{1\cdot P(A_1)+2\cdot P(A_2)+3\cdot P(A_3)\}\\
&\qquad +P_W(B)\{1\cdot P(B_1)+2\cdot P(B_2)+3\cdot P(B_3)\}\\
&=\boldsymbol{P_W(A)\times\frac{3}{2}+P_W(B)\times 1}\\
&=\frac{27}{59}\cdot\frac{3}{2}+\frac{32}{59}\cdot 1\\
&=\frac{145}{118}
\end{aligned}$$

⇨ ②，③

◀ $1\cdot P(A_1)+2\cdot P(A_2)+3\cdot P(A_3)$
$1\cdot P(B_1)+2\cdot P(B_2)+3\cdot P(B_3)$
は，それぞれ箱 A，B において，3 回引いたときに当たりくじを引く回数の期待値であるから，(1)で求めた値を利用できる。

(Y) の場合についても同様に考えると，当たりくじを引く回数の期待値を計算する式は

$$\begin{aligned}
&1\cdot P_W(B)\cdot P(A_1)+1\cdot P_W(A)\cdot P(B_1)\\
&\quad +2\cdot P_W(B)\cdot P(A_2)+2\cdot P_W(A)\cdot P(B_2)\\
&\qquad +3\cdot P_W(B)\cdot P(A_3)+3\cdot P_W(A)\cdot P(B_3)\\
&=P_W(B)\{1\cdot P(A_1)+2\cdot P(A_2)+3\cdot P(A_3)\}\\
&\qquad +P_W(A)\{1\cdot P(B_1)+2\cdot P(B_2)+3\cdot P(B_3)\}\\
&=\frac{32}{59}\cdot\frac{3}{2}+\frac{27}{59}\cdot 1\\
&=\boldsymbol{\frac{75}{59}}
\end{aligned}$$

◀花子さんが選んだ箱が A であるとき太郎さんが選んだ箱は B であり，花子さんが選んだ箱が B であるとき太郎さんが選んだ箱は A である。

よって，(Y) の場合の当たりくじを引く回数の期待値の方が大きいから，当たりくじを引く回数の期待値が大きい方の箱を選ぶという方針に基づくと，花子さんは，太郎さんが選んだ箱と**異なる箱を選ぶ方がよい**。 ⇨ ①

◀ $\frac{75}{59}=\frac{150}{118}>\frac{145}{118}$