

第1問

(1) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

であるから、三角関数の合成により

$$\begin{aligned} y &= \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) \\ &= 2 \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

と変形できる。

よって、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{6} \pi$$

であるから、 y は

$$\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \text{ すなわち } \theta = \frac{\pi}{6}$$

で最大値

$$2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$$

をとる。

(2) (i) $p = 0$ のとき、 $y = \sin \theta$ であるから、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において、 y は

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ で最大値 } 1$$

をとる。

(ii) $p > 0$ のとき、加法定理

$$\cos(\theta - \alpha) = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha$$

を用いた三角関数の合成により

$$\begin{aligned} y &= \sin \theta + p \cos \theta = \sqrt{1+p^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \sin \theta + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cos \theta \right) \\ &= \sqrt{1+p^2} (\sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta) \\ &= \sqrt{1+p^2} (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) \\ &= \sqrt{1+p^2} \cos(\theta - \alpha) \end{aligned}$$

と表すことができる。ただし、 α は

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \cos \alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \textcircled{1}, \textcircled{3}$$

を満たすものとする。

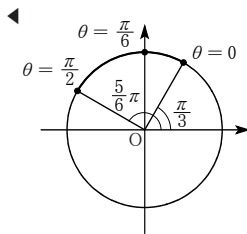
よって、 $-\alpha \leq \theta - \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$ であるから、 y は

$$\theta - \alpha = 0 \text{ すなわち } \theta = \alpha$$

で最大値

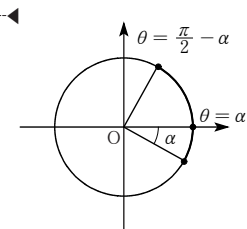
$$\sqrt{1+p^2}$$

をとる。



◀ $y = \sin \theta + p \cos \theta$ より。

◀ $\cos(\theta - \alpha)$ の加法定理より。



⇨ ⑨

⇨ ①

⇨ ⑨

(iii) $p < 0$ のとき, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において, $\sin \theta$ と $p \cos \theta$ は, θ が増加するとともに増加するので, $\sin \theta + p \cos \theta$ も, θ が増加するとともに増加する。

よって, y は

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \textcircled{2}$$

で最大値

$$\sin \frac{\pi}{2} + p \cos \frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1 \quad \Rightarrow \textcircled{1}$$

をとる。

研究

(2)(iii)を(iii)を用いて解くと, 次のようになる。

$p < 0$ のとき, (iii)と同様に

$$y = \sqrt{1+p^2} \cos(\theta - \alpha)$$

と表すことができ, このとき

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} > 0, \quad \cos \alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} < 0$$

より

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

とおくことができ

$$-\alpha \leq \theta - \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$$

において

$$-\pi < -\alpha < -\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \alpha < 0$$

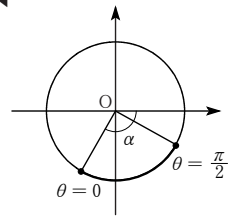
であるから, y は θ が増加するとともに増加する。したがって, $\theta = \frac{\pi}{2}$ で最大値

$$\sqrt{1+p^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sqrt{1+p^2} \sin \alpha = \sqrt{1+p^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = 1$$

をとることがわかる。

ただし, この方法では時間がかかるので, 解答のように効率よく処理できる方法を考えることが大切である。

◀ $y = \sin \theta + p \cos \theta$ において, $\sin \theta$ と $p \cos \theta$ のそれぞれに着目する。



第2問

(1) $f(0) = \frac{2^0 + 2^0}{2} = 1, \quad g(0) = \frac{2^0 - 2^0}{2} = 0$

また, $2^x > 0, 2^{-x} > 0$ より, 相加平均と相乗平均の関係から

$$f(x) \geq \sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 1$$

であり, 等号は $2^x = 2^{-x}$ すなわち $x = 0$ のときに成り立つので, $f(x)$ は

$$x = 0 \text{ で最小値 } 1$$

をとる。

$$g(x) = -2 \text{ のとき}$$

$$\frac{2^x - 2^{-x}}{2} = -2 \text{ すなわち } 2^x - 2^{-x} + 4 = 0$$

であり, この式の両辺を 2^x 倍すると

$$(2^x)^2 + 4 \cdot 2^x - 1 = 0$$

これを解くと

$$2^x = -2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \cdot (-1)}$$

ゆえに

$$2^x = -2 \pm \sqrt{5}$$

◀ $a > 0, b > 0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

等号は $a = b$ のときに成り立つ。

◀ $2^x = X$ とおくと

$$X^2 + 4X - 1 = 0$$

である。

$2^x > 0$ より

$$2^x = \sqrt{5} - 2$$

両辺の2を底とする対数をとると

$$\log_2 2^x = \log_2(\sqrt{5} - 2)$$

ゆえに

$$x = \log_2(\sqrt{5} - 2)$$

である。

$$(2) \quad f(-x) = \frac{2^{-x} + 2^{-(-x)}}{2} = \frac{2^x + 2^{-x}}{2} = f(x) \quad \Leftrightarrow \textcircled{0}$$

$$g(-x) = \frac{2^{-x} - 2^{-(-x)}}{2} = -\frac{2^x - 2^{-x}}{2} = -g(x) \quad \Leftrightarrow \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 &= \{f(x) + g(x)\}\{f(x) - g(x)\} \\ &= 2^x \cdot 2^{-x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(2x) &= \frac{2^{2x} - 2^{-2x}}{2} = \frac{(2^x)^2 - (2^{-x})^2}{2} \\ &= \frac{(2^x + 2^{-x})(2^x - 2^{-x})}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{2^x + 2^{-x}}{2} \cdot \frac{2^x - 2^{-x}}{2} \\ &= 2f(x)g(x) \end{aligned}$$

(3) ある値において成り立たない場合があることを確かめられればよいので、 $\beta = 0$ として、式(A)~(D)について調べる。

$$(A) \quad f(\alpha) = f(\alpha)g(0) + g(\alpha)f(0)$$

$$f(0) = 1, \quad g(0) = 0 \text{ より}$$

$$f(\alpha) = g(\alpha)$$

$\alpha = 0$ のときに $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ となるので、 $\alpha = 0$ かつ $\beta = 0$ のとき、(A)は成り立たない。

$$(B) \quad f(\alpha) = f(\alpha)f(0) + g(\alpha)g(0) \text{ すなわち } f(\alpha) = f(\alpha)$$

すべての α で $f(\alpha) = f(\alpha)$ となるので、 $\beta = 0$ のとき、(B)は成り立つ。

$$(C) \quad g(\alpha) = f(\alpha)f(0) + g(\alpha)g(0) \text{ すなわち } g(\alpha) = f(\alpha)$$

(A)と同様に、 $\alpha = 0$ かつ $\beta = 0$ のとき、(C)は成り立たない。

$$(D) \quad g(\alpha) = f(\alpha)g(0) - g(\alpha)f(0) \text{ すなわち } g(\alpha) = -g(\alpha)$$

$$\alpha = 1 \text{ のとき、 } g(1) = \frac{3}{4} \text{ であり}$$

$$g(1) \neq -g(1)$$

であるから、 $\alpha = 1$ かつ $\beta = 0$ のとき、(D)は成り立たない。

以上より、(B)以外の三つは成り立たないことがわかる。

$\Leftrightarrow \textcircled{1}$

研究

解答では、 $\beta = 0$ のとき(B)以外は成り立たない場合があることを確認したが、(B)がつねに成り立つことは、次のように右辺を変形して確かめられる。

$$\begin{aligned} & f(\alpha)f(\beta) + g(\alpha)g(\beta) \\ &= \frac{2^\alpha + 2^{-\alpha}}{2} \cdot \frac{2^\beta + 2^{-\beta}}{2} + \frac{2^\alpha - 2^{-\alpha}}{2} \cdot \frac{2^\beta - 2^{-\beta}}{2} \\ &= \frac{2(2^\alpha \cdot 2^\beta + 2^{-\alpha} \cdot 2^{-\beta})}{4} = \frac{2^{\alpha+\beta} + 2^{-(\alpha+\beta)}}{2} \\ &= f(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

◀ 対数の性質から
 $x = \log_2(\sqrt{5} - 2)$
としてもよい。

◀ $f(x)g(x)$
 $= \frac{2^x + 2^{-x}}{2} \cdot \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{2x} - 2^{-2x}}{2}$
 $= \frac{1}{2}g(2x)$
から求めることもできる。

◀ $f(\alpha - \beta)$
 $= f(\alpha)g(\beta) + g(\alpha)f(\beta)$
より。

◀ $f(\alpha + \beta)$
 $= f(\alpha)f(\beta) + g(\alpha)g(\beta)$

◀ $g(\alpha - \beta)$
 $= f(\alpha)f(\beta) + g(\alpha)g(\beta)$

◀ $g(\alpha + \beta)$
 $= f(\alpha)g(\beta) - g(\alpha)f(\beta)$

第3問

(1) ①, ②ともに $x=0$ のとき $y=3$ であるから, y 軸との交点の y 座標は3である。

また, ①の導関数は $y' = 6x + 2$, ②の導関数は $y' = 4x + 2$ であり, ①, ②ともに $x=0$ における微分係数は2であるから, y 軸との交点における接線の方程式は

$$y = 2x + 3$$

である。

よって, ①, ②の共通点から, y 軸との交点における接線の方程式は x の1次の項の係数と定数項によって決まり, y 軸との交点における接線の方程式が $y = 2x + 3$ となる2次関数のグラフの方程式は, x の1次の項の係数が2, 定数項が3である。したがって, ウの解答群の中で適するものは④である。

a, b, c を0でない実数とする。曲線 $y = ax^2 + bx + c$ 上にある x 座標が0である点の座標は

$$(0, c)$$

であり, 点 $(0, c)$ における接線 l の方程式は, x の1次の項の係数が b , 定数項が c であるから

$$y = bx + c$$

接線 l と x 軸との交点の x 座標は

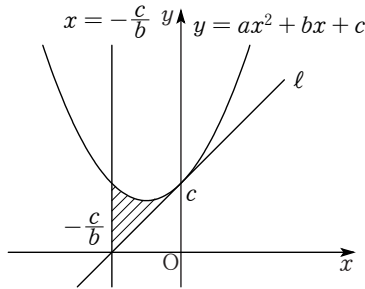
$$0 = bx + c$$

より

$$x = -\frac{c}{b}$$

である。

曲線 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c は正の実数) と接線 l および直線 $x = -\frac{c}{b}$ で囲まれた図形の面積 S は, 右のような図の斜線部分である。



よって

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{c}{b}}^0 \{ax^2 + bx + c - (bx + c)\} dx = \int_{-\frac{c}{b}}^0 ax^2 dx \\ &= \left[\frac{a}{3} x^3 \right]_{-\frac{c}{b}}^0 = \frac{a}{3} \left\{ 0 - \left(-\frac{c}{b} \right)^3 \right\} \\ &= \frac{ac^3}{3b^3} \dots\dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

③において $a=1$ とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{c^3}{3b^3} \\ 3S &= \left(\frac{c}{b} \right)^3 \\ \frac{c}{b} &= \sqrt[3]{3S} \end{aligned}$$

ゆえに

$$c = \sqrt[3]{3S} b$$

S の値が一定になるように正の実数 b, c を変化させるとき, $\sqrt[3]{3S}$ は正の定数で, c は b に比例する (c は b の1次関数になる) ので, b と c の関係を表すグラフの概形として最も適当なものは④である。

◀点 $(0, 3)$ を通る傾き2の直線である。

◀ $y = -x^2 + 2x + 3$ が適する。

◀ $y = ax^2 + bx + c$ に $x=0$ を代入すると $y=c$ である。

◀ $y = ax^2 + bx + c$ から求める。

◀曲線 $y = ax^2 + bx + c$ は l の上側にあること, $-\frac{c}{b} < 0$ であることに注意して図をかく。

◀ S を定数とみて, この式を c について解く。

- (2) a, b, c, d を 0 でない実数とする。曲線 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 上にある x 座標が 0 である点の座標は $(0, d)$ であり、点 $(0, d)$ における接線の方程式は、(1)と同様に考えて

$$y = cx + d$$

となる。

次に、 $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} h(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d - (cx + d) = ax^3 + bx^2 \\ &= x^2(ax + b) \end{aligned}$$

であり、 $y = h(x)$ のグラフは、 x 軸と点 $(0, 0)$ で接し、点 $(-\frac{b}{a}, 0)$ で交わる。

$h(x) = 0$ のとき

$$f(x) - g(x) = 0 \text{ すなわち } f(x) = g(x)$$

であるから、 $h(x) = 0$ を満たす x が $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの共有点の x 座標である。

よって、 $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は

$$-\frac{b}{a} \text{ と } 0$$

また、 x が $-\frac{b}{a}$ と 0 の間を動くとき

$$h'(x) = 3ax^2 + 2bx = x(3ax + 2b)$$

より $h(x)$ は $x = -\frac{2b}{3a}$ のときにだけ極値をとり、このとき

$|h(x)| = |f(x) - g(x)|$ は最大となる。

したがって、 $|f(x) - g(x)|$ の値が最大となるのは

$$x = \frac{-2b}{3a}$$

のときである。

◀ 点 $(0, d)$ を通る傾き c の直線である。

◀ 方程式 $x^2(ax + b) = 0$ の解である。

◀ $|h(x)|$ は $y = h(x)$ のグラフ上の点と x 軸との距離とみることできる。

第 4 問

$$a_n b_{n+1} - 2a_{n+1} b_n + 3b_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{①}$$

- (1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 3、公差 p の等差数列であるから

$$a_n = 3 + (n-1)p \quad \text{②}$$

$$a_{n+1} = 3 + np \quad \text{③}$$

数列 $\{b_n\}$ は初項 3、公比 r の等比数列であるから

$$b_n = 3r^{n-1}$$

次に、①の両辺を b_n で割ると

$$a_n \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n} - 2a_{n+1} \cdot \frac{b_n}{b_n} + 3 \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n} = 0$$

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = r$ であるから

$$ra_n - 2a_{n+1} + 3r = 0$$

ゆえに

$$2a_{n+1} = r(a_n + 3) \quad \text{④}$$

が成り立つので、④に②と③を代入すると

$$2(3 + np) = r\{3 + (n-1)p + 3\}$$

$$6 + 2pn = 6r + rpn - rp$$

ゆえに

$$(r-2)pn = r(p-6) + 6 \quad \text{⑤}$$

となる。⑤がすべての n で成り立つことおよび $p \neq 0$ により、 $r = 2$ であり、

◀ ②において、 $n \rightarrow n+1$ とし、 $n-1 \rightarrow n$ とした。

◀ $b_n \neq 0$

◀ 数列 $\{b_n\}$ は公比 r の等比数列である。

$r = 2$ を⑤に代入して

$$0 = 2(p - 6) + 6$$

ゆえに

$$p = 3$$

が得られる。

$$(2) \quad a_n c_{n+1} - 4a_{n+1} c_n + 3c_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{⑥}$$

⑥を変形すると

$$(a_n + 3)c_{n+1} = 4a_{n+1}c_n$$

$a_n > 0$ より

$$c_{n+1} = \frac{4a_{n+1}}{a_n + 3} c_n$$

を得る。さらに、 $p = 3$ であることから、 $a_n = 3n$ 、 $a_{n+1} = 3(n+1)$ を代入すると

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{4 \cdot 3(n+1)}{3n+3} c_n = \frac{4 \cdot 3(n+1)}{3(n+1)} c_n \\ &= 4c_n \end{aligned}$$

よって、数列 $\{c_n\}$ は公比 4 の等比数列なので、公比が 1 より大きい等比数列であることがわかる。 \Rightarrow ②

$$(3) \quad d_n b_{n+1} - qd_{n+1} b_n + u b_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{⑦}$$

⑦の両辺を b_n で割ると

$$d_n \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n} - qd_{n+1} \cdot \frac{b_n}{b_n} + u \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n} = 0$$

(1)と同様に、 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$ を代入して

$$2d_n - qd_{n+1} + 2u = 0$$

$q \neq 0$ より

$$d_{n+1} = \frac{2}{q}(d_n + u)$$

を得る。

したがって、数列 $\{d_n\}$ が、公比が 0 より大きく 1 より小さい等比数列となるための必要十分条件は

$$0 < \frac{2}{q} < 1 \text{ すなわち } q > 2$$

かつ

$$d_n + u = d_n \text{ すなわち } u = 0$$

である。

◀ $a_n + 3 \neq 0$

◀ $p = 3$ を②、③に代入すると、 $a_n = 3n$ 、 $a_{n+1} = 3(n+1)$ が得られる。

◀ $b_n \neq 0$

◀ $d_{n+1} = \frac{2}{q} d_n$ のとき、数列 $\{d_n\}$ は公比 $\frac{2}{q}$ の等比数列である。

第5問

(1) \bar{X} は確率変数 X の標本平均であり、標本の大きさ 49 が十分に大きいことから、平均 $E(\bar{X}) = m$ 、標準偏差 $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{49}} = \frac{\sigma}{7}$ の正規分布に近似的に従う。 \Rightarrow ④、⑦

確率変数 W が近似的に従う正規分布の平均を $E(W)$ 、標準偏差を $\sigma(W)$ とすると、方針より $W = 125000 \times \bar{X}$ であるから

$$\begin{aligned} E(W) &= E(125000 \times \bar{X}) = 125000 \times E(\bar{X}) \\ &= 125000m \end{aligned} \quad \Rightarrow \text{④}$$

$$\sigma(W) = 125000 \times \sigma(\bar{X}) = \frac{125000}{7} \sigma \quad \Rightarrow \text{⑤}$$

このとき、 X の母標準偏差 σ は標本の標準偏差と同じ $\sigma = 2$ であると仮定する

◀ 標本の大きさ n が十分に大きいとき、その標本平均の平均は母平均に等しく、母標準偏差が σ のとき、その標本平均の標準偏差は $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ である。

◀ \bar{X} 、 W の分散をそれぞれ $V(\bar{X})$ 、 $V(W)$ とすると $\sigma(W) = \sqrt{V(W)}$ $= \sqrt{V(125000 \times \bar{X})}$ $= \sqrt{125000^2 \times V(\bar{X})}$ $= 125000 \times \sqrt{V(\bar{X})}$ $= 125000 \times \sigma(\bar{X})$

と、花子さんたちが調べた 49 区画では $\bar{X} = 16$ であるから、 X の母平均 m に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$\bar{X} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$16 - 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{49}} \leq m \leq 16 + 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{49}}$$

$$16 - 0.56 \leq m \leq 16 + 0.56$$

$$15.44 \leq m \leq 16.56$$

$M = 125000 \times m$ より、 M に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$15.44 \times 125000 \leq M \leq 16.56 \times 125000$$

$$193 \times 10^4 \leq M \leq 207 \times 10^4$$

- (2) 今年の母平均 m が今年の母平均 15 と異なるといえるかを仮説検定するとき、「今年の母平均は 15 である」という仮説が正しくなければ、今年の母平均は 15 と異なるといえる。すなわち、帰無仮説は「今年の母平均は 15 である」であり、対立仮説は「今年の母平均は 15 ではない」である。 ⇨ ②, ⑥

帰無仮説が正しいとすると、 \bar{X} は平均 15、標準偏差 $\frac{2}{\sqrt{49}} = \frac{2}{7}$ の正規分布に近似的に従う。 ⇨ ⑦, ①

したがって、確率変数 $Z = \frac{\bar{X} - 15}{\frac{2}{7}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に近似的に従う。

花子さんたちの調査結果から求めた Z の値を z とすると

$$z = \frac{16 - 15}{\frac{2}{7}} = 3.5$$

よって、 $P(Z \leq -3.5)$ と $P(Z \geq 3.5)$ の和は

$$\begin{aligned} 1 - P(-3.5 \leq Z \leq 3.5) &= 1 - 2 \times P(0 \leq Z \leq 3.5) \\ &= 1 - 2 \times 0.4998 \\ &= 1 - 0.9996 \\ &= 0.0004 \end{aligned}$$

となり、0.05 よりも小さいので、帰無仮説は棄却される。 ⇨ ①

よって、有意水準 5 % で今年の母平均 m は昨年と異なるといえる。 ⇨ ⑥

◀標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 U について

$$P(-z_0 \leq U \leq z_0) = 0.95$$

となるような z_0 を求めると

$$2 \times P(0 \leq U \leq z_0) = 0.95$$

$$P(0 \leq U \leq z_0) = 0.475$$

であるから、正規分布表より $z_0 = 1.96$ であることがわかる。

◀仮説検定において、正しいかどうか判断したい主張を対立仮説といい、この主張に反する仮定として立てた仮説を帰無仮説という。

◀母平均 15、母標準偏差 2 である母集団から 49 個を無作為抽出した標本平均が \bar{X} である。

◀ $\bar{X} = 16$

◀正規分布表より
 $P(0 \leq Z \leq 3.5) = 0.4998$

第6問

- (1) $\triangle B_1C_1A_1$ は、 $B_1A_1 = B_1C_1$ の二等辺三角形で、 $\angle A_1B_1C_1 = 108^\circ$ であるから

$$\angle A_1C_1B_1 = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$

また、 $\angle C_1A_1A_2 = 108^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 36^\circ$ であり、 $\angle A_1C_1B_1 = \angle C_1A_1A_2$ より錯角が等しいことから、 $\overrightarrow{A_1A_2}$ と $\overrightarrow{B_1C_1}$ は平行で、 $A_1A_2 : B_1C_1 = a : 1$ より

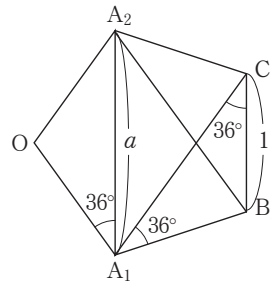
$$\overrightarrow{A_1A_2} = a \overrightarrow{B_1C_1}$$

であるから

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{a} \overrightarrow{A_1A_2} = \frac{1}{a} (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1})$$

同様に考えて、 $\overrightarrow{OA_1}$ と $\overrightarrow{A_2B_1}$ も平行で、さらに、 $\overrightarrow{OA_2}$ と $\overrightarrow{A_1C_1}$ も平行であることから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B_1C_1} &= \overrightarrow{B_1A_2} + \overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} \\ &= -a \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_1} + a \overrightarrow{OA_2} \end{aligned}$$



◀ $\angle B_1A_1C_1 = \angle A_2A_1O = 36^\circ$ より。

$$= (a-1)(\vec{OA_2} - \vec{OA_1})$$

となる。したがって

$$\frac{1}{a} = a-1$$

$$a^2 - a - 1 = 0 \text{ すなわち } a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$a > 0$ より

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

である。

(2) 面 $OA_1B_1C_1A_2$ に着目すると

$$\begin{aligned} \vec{OB_1} &= \vec{OA_2} + \vec{A_2B_1} \\ &= \vec{OA_2} + a\vec{OA_1} \end{aligned} \quad \text{..... ①}$$

である。また

$$\begin{aligned} |\vec{OA_2} - \vec{OA_1}|^2 &= |\vec{A_1A_2}|^2 = a^2 \\ &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} |\vec{OA_2} - \vec{OA_1}|^2 &= |\vec{OA_2}|^2 - 2\vec{OA_2} \cdot \vec{OA_1} + |\vec{OA_1}|^2 \\ &= 1^2 - 2\vec{OA_2} \cdot \vec{OA_1} + 1^2 \\ &= 2 - 2\vec{OA_2} \cdot \vec{OA_1} \end{aligned}$$

より

$$2 - 2\vec{OA_2} \cdot \vec{OA_1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

ゆえに

$$\vec{OA_1} \cdot \vec{OA_2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

を得る。

次に、面 $OA_2B_2C_2A_3$ に着目すると

$$\vec{OB_2} = \vec{OA_3} + a\vec{OA_2} \quad \text{..... ②}$$

$\vec{OA_1} \cdot \vec{OA_2}$ と同様に考えて

$$\vec{OA_2} \cdot \vec{OA_3} = \vec{OA_3} \cdot \vec{OA_1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

が成り立つので、②より

$$\begin{aligned} \vec{OA_1} \cdot \vec{OB_2} &= \vec{OA_1} \cdot (\vec{OA_3} + a\vec{OA_2}) \\ &= \vec{OA_1} \cdot \vec{OA_3} + a\vec{OA_1} \cdot \vec{OA_2} \\ &= \frac{1 - \sqrt{5}}{4} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \quad \Leftrightarrow \text{③} \end{aligned}$$

①, ②より

$$\begin{aligned} \vec{OB_1} \cdot \vec{OB_2} &= (\vec{OA_2} + a\vec{OA_1}) \cdot (\vec{OA_3} + a\vec{OA_2}) \\ &= \vec{OA_2} \cdot \vec{OA_3} + a|\vec{OA_2}|^2 + a\vec{OA_1} \cdot \vec{OA_3} + a^2\vec{OA_1} \cdot \vec{OA_2} \\ &= \frac{1 - \sqrt{5}}{4} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot 1^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{4} + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \\ &= 0 \quad \Leftrightarrow \text{④} \end{aligned}$$

である。

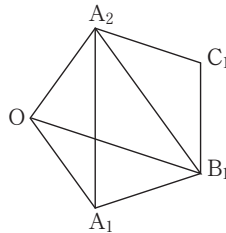
最後に、面 $A_2C_1DEB_2$ に着目して

$$\vec{B_2D} = a\vec{A_2C_1} = \vec{OB_1}$$

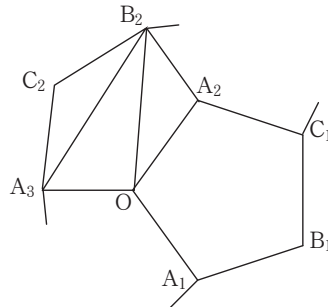
$$\begin{aligned} \leftarrow \vec{B_1C_1} &= \frac{1}{a}(\vec{OA_2} - \vec{OA_1}) \text{ と} \\ \vec{B_1C_1} &= (a-1)(\vec{OA_2} - \vec{OA_1}) \text{ より。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leftarrow a^2 - a - 1 = 0 \text{ より} \\ a^2 &= a + 1 \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 \\ &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

としてもよい。



$$\leftarrow \vec{OB_2} = \vec{OA_3} + \vec{A_3B_2} = \vec{OA_3} + a\vec{OA_2}$$



$$\begin{aligned} \leftarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{4} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

であることに注意すると、四角形 OB_1DB_2 は平行四辺形であり

$$\begin{aligned} OB_1 &= OB_2 = a \\ \overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{OB_2} &= 0 \text{ より} \\ \angle B_1OB_2 &= 90^\circ \end{aligned}$$

であるから、平行四辺形 OB_1DB_2 は、4 辺が等しく、内角の一つが 90° であることがわかる。よって、正方形であることがわかる。 \Rightarrow ⑥

◀正五角形の対角線の長さは a である。

◀平行四辺形において、4 辺が等しいだけだと、ひし形の可能性がある。

第7問

[1]

$a = 2, c = -8, d = -4, f = 0$ における図形の方程式は

$$2x^2 + by^2 - 8x - 4y = 0 \quad \dots\dots\dots ①$$

まず、 $b = 0$ のとき、①は

$$2x^2 - 8x - 4y = 0 \text{ すなわち } y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

となるから、座標平面上には放物線が現れる。

次に、 $b > 0$ のとき、①を変形すると

$$2(x-2)^2 - 8 + b\left(y - \frac{2}{b}\right)^2 - \frac{4}{b} = 0$$

すなわち

$$2(x-2)^2 + b\left(y - \frac{2}{b}\right)^2 = 8 + \frac{4}{b}$$

となる。

よって、 $b = 2$ のとき

$$2(x-2)^2 + 2(y-1)^2 = 10 \text{ すなわち } (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

となり、円が現れる。

また、 $0 < b < 2, 2 < b$ のとき、 $8 + \frac{4}{b} > 0$ より楕円が現れる。

以上より、楕円、円、放物線が現れ、他の図形は現れない。 \Rightarrow ②

◀原点を中心とする楕円を、 x 軸方向に 2、 y 軸方向に $\frac{2}{b}$ だけ平行移動したものだ。

[2]

$r > 0$ とし、 $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とする。 $w = w^n$ (n は 1 以上の整数) について、両辺の絶対値に着目すると

$$r = r^n$$

$r \neq 0$ より、両辺を r で割って

$$1 = r^{n-1}$$

よって、 $r = 1$ より

$$|w| = 1$$

$1 \leq k \leq n-1$ に対して

$$\begin{aligned} A_k A_{k+1} &= |w^{k+1} - w^k| = |w^k(w-1)| = |w|^k \cdot |w-1| \\ &= |w-1| \end{aligned} \quad \Rightarrow ①$$

であり、つねに一定である。

また、 $2 \leq k \leq n-1$ に対して

$$\begin{aligned} \angle A_{k+1} A_k A_{k-1} &= \arg\left(\frac{w^{k-1} - w^k}{w^{k+1} - w^k}\right) = \arg\left(\frac{w^{k-1}(1-w)}{w^k(w-1)}\right) \\ &= \arg\left(-\frac{1}{w}\right) \end{aligned} \quad \Rightarrow ③$$

であり、つねに一定である。

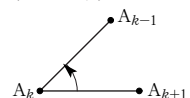
$n = 25$ のとき、すなわち、 A_1 と A_{25} が重なるとき、 A_1 から A_{25} までを順に線分で結んでできる図形が正多角形になる場合には

正二十四角形、正十二角形、正八角形、正六角形、正方形、正三角形

◀ド・モアブルの定理より $w^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

◀ $|w| = 1$

◀ $\angle A_{k+1} A_k A_{k-1}$ は、線分 $A_k A_{k+1}$ を線分 $A_k A_{k-1}$ に重なるまで回転させた角である。



の 6 通りがある。

正二十四角形の時 $w = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$

正十二角形の時 $w = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$

正八角形の時 $w = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$

正六角形の時 $w = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$

正方形の時 $w = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

正三角形の時 $w = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$

であり、それぞれの場合について、対応する w の値が一つずつ存在するから、このような w の値は全部で 6 個である。

また、このような正多角形について、どの場合であっても、それぞれの正多角形に内接する円の中心は原点である。

正多角形と円の接点を表す複素数は、

$1 \leq k \leq 23$ として

$$\frac{w^k + w^{k+1}}{2} = \frac{w^k(1+w)}{2}$$

と表せるから、円上の点 z が満たす式は

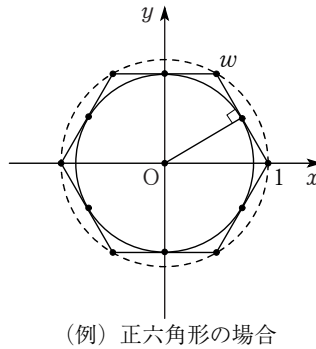
$$|z| = \left| \frac{w^k(w+1)}{2} \right|$$

$$|z| = \frac{|w|^k \cdot |w+1|}{2}$$

よって

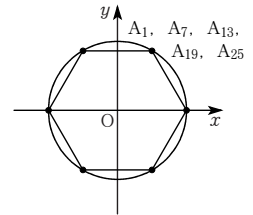
$$|z| = \frac{|w+1|}{2}$$

⇨ ⑥



◀ 24 の約数で 3 以上のものを考える。

◀ 例えば、 A_1 と A_7 が一致するとき、 A_{13} , A_{19} , A_{25} も A_1 と一致し、正六角形になる。



このとき

$$w = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

である。

◀ 線分 $A_k A_{k+1}$ の中点。

◀ z が表す点は、原点を中心とする半径 $\left| \frac{w^k + w^{k+1}}{2} \right|$ の円上にある。

◀ $|w|=1$