第1問

〔1〕
$$\sqrt{5}x < k - x < 2x + 1 \quad \cdots\cdots ①$$

(1)　不等式 $k - x < 2x + 1$ を解くと

$$-3x < 1 - k$$

$$\boldsymbol{x > \frac{k-1}{3}} \quad \cdots\cdots (*)$$

であり，不等式 $\sqrt{5}x < k - x$ を解くと

$$(\sqrt{5}+1)x < k$$

$\sqrt{5}+1 > 0$ より，両辺を $\sqrt{5}+1$ で割ると

$$x < \frac{k}{\sqrt{5}+1}$$

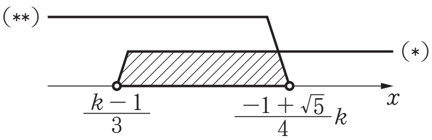
ここで

$$\frac{k}{\sqrt{5}+1} = \frac{k(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{k(\sqrt{5}-1)}{4}$$

よって

$$\boldsymbol{x < \frac{-1+\sqrt{5}}{4}k} \quad \cdots\cdots (**)$$

不等式①の解は，$(*)$ と $(**)$ の共通部分であるから，不等式①を満たす x が存在するのは，$(*)$ と $(**)$ の共通部分が存在するときである。



すなわち

$$\frac{k-1}{3} < \frac{-1+\sqrt{5}}{4}k$$

$$4(k-1) < 3(-1+\sqrt{5})k$$

$$(7-3\sqrt{5})k < 4$$

$3\sqrt{5} = \sqrt{45}$，$7 = \sqrt{49}$ より $7 - 3\sqrt{5} > 0$ であるから，両辺を $7 - 3\sqrt{5}$ で割ると

$$k < \frac{4}{7-3\sqrt{5}}$$

ここで

$$\frac{4}{7-3\sqrt{5}} = \frac{4(7+3\sqrt{5})}{(7-3\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})} = \frac{4(7+3\sqrt{5})}{49-45} = 7+3\sqrt{5}$$

よって

$$\boldsymbol{k < 7+3\sqrt{5}} \quad \cdots\cdots ②$$

(2)　②が成り立つとき，不等式①を満たす x の値の範囲は，$(*)$，$(**)$ より

$$\frac{k-1}{3} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{4}k$$

したがって，その範囲の幅は

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}k - \frac{k-1}{3} = \frac{3(-1+\sqrt{5})k - 4(k-1)}{12} = \frac{(3\sqrt{5}-7)k+4}{12}$$

これが $\frac{\sqrt{5}}{3}$ より大きくなるとき

$$\frac{(3\sqrt{5}-7)k+4}{12} > \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$(3\sqrt{5}-7)k > 4\sqrt{5}-4$$

$3\sqrt{5} - 7 < 0$ より，両辺を $3\sqrt{5} - 7$ で割ると

$$k < \frac{4\sqrt{5}-4}{3\sqrt{5}-7}$$

ここで

$$\frac{4\sqrt{5}-4}{3\sqrt{5}-7} = \frac{\left(4\sqrt{5}-4\right)\left(3\sqrt{5}+7\right)}{\left(3\sqrt{5}-7\right)\left(3\sqrt{5}+7\right)} = \frac{32+16\sqrt{5}}{45-49} = -8-4\sqrt{5}$$

よって

$$\boldsymbol{k < -8-4\sqrt{5}}$$

〔2〕

(1)　$\sin^2\angle ABC+\cos^2\angle ABC = 1$ であるから，$\sin\angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{4}$ のとき

$$\boldsymbol{\cos\angle ABC} = \pm\sqrt{1-\sin^2\angle ABC} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{1}{16}}$$

$$= \pm\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}$$

(2)　$\sin\angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{4}$，$\sin\angle ACB = \frac{\sqrt{15}}{8}$ であるとする。

(i)　$\triangle ABC$ において，正弦定理より

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{AB}{\sin\angle ACB}$$

$$AC\sin\angle ACB = AB\sin\angle ABC$$

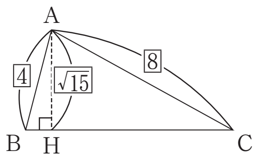
$$\frac{\sqrt{15}}{8}AC = \frac{\sqrt{15}}{4}AB$$

よって

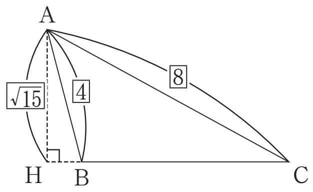
$$\boldsymbol{AC = 2AB}$$

別解

三角比の定義から求めてもよい。△ABC において，点 A から直線 BC に向かって引いた垂線と直線 BC との交点を H とする。



∠ABC が鋭角の場合



∠ABC が鈍角の場合

このとき，$\sin\angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{4}$ より

$$\frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$AB = \frac{4}{\sqrt{15}}AH$$

また，$\sin\angle ACB = \frac{\sqrt{15}}{8}$ より

$$\frac{AH}{AC} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$AC = \frac{8}{\sqrt{15}}AH = 2\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}AH = 2AB$$

(ii)　条件を満たす △ABC は，(1)より

$$\cos\angle ABC = \frac{1}{4} \text{ または } \cos\angle ABC = -\frac{1}{4}$$

となる三角形である。

△ABC において，余弦定理より

$$AC^2 = AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC$$

$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{4}$ のとき

$$(2\mathrm{AB})^2=\mathrm{AB}^2+1^2-2\mathrm{AB}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}$$
$$6\mathrm{AB}^2+\mathrm{AB}-2=0$$
$$(3\mathrm{AB}+2)(2\mathrm{AB}-1)=0$$

$\mathrm{AB}>0$ より

$$\mathrm{AB}=\frac{1}{2}$$

$\cos\angle\mathrm{ABC}=-\dfrac{1}{4}$ のとき

$$(2\mathrm{AB})^2=\mathrm{AB}^2+1^2-2\mathrm{AB}\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$6\mathrm{AB}^2-\mathrm{AB}-2=0$$
$$(3\mathrm{AB}-2)(2\mathrm{AB}+1)=0$$

$\mathrm{AB}>0$ より

$$\mathrm{AB}=\frac{2}{3}$$

ここで，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{8}\mathrm{AB}$$

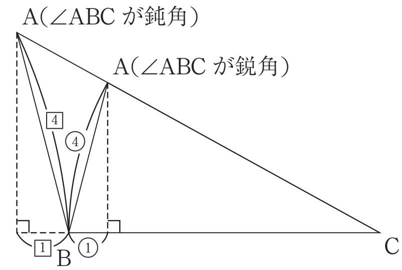
より，AB が大きい方が S も大きくなる。よって，面積が大きい方の $\triangle\mathrm{ABC}$ においては

$$\mathbf{AB}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

研究

条件を満たす $\triangle\mathrm{ABC}$ において，

$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{4}$ のとき $\angle\mathrm{ABC}$ は鋭角であり，$\cos\angle\mathrm{ABC}=-\dfrac{1}{4}$ のとき $\angle\mathrm{ABC}$ は鈍角である。$\mathrm{BC}=1$ であることに注意すると，$\angle\mathrm{ABC}$ が鋭角，鈍角のときの $\triangle\mathrm{ABC}$ は次の図のようになる。



このことから，面積が大きい方の $\triangle\mathrm{ABC}$ は，$\angle\mathrm{ABC}$ が鈍角，つまり $\cos\angle\mathrm{ABC}=-\dfrac{1}{4}$ のときのものであることがわかる。

(3) $\sin\angle\mathrm{ABC}=2\sin\angle\mathrm{ACB}$ のとき，(2)と同様にして，正弦定理より $\mathrm{AC}=2\mathrm{AB}$ が成り立つ。$\mathrm{BC}=1$ であるから，$\triangle\mathrm{ABC}$ において，余弦定理より

$$\mathbf{cos}\,\angle\mathbf{ABC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{AB}^2+1^2-(2\mathrm{AB})^2}{2\mathrm{AB}\cdot 1}$$
$$=\frac{\mathbf{1-3AB^2}}{\mathbf{2AB}}$$

ここで

$$S^2=\left(\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}\right)^2=\frac{1}{4}\mathrm{AB}^2\cdot 1\cdot\left(1-\cos^2\angle\mathrm{ABC}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\mathrm{AB}^2\left\{1-\left(\frac{1-3\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{AB}}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{AB}^2 \cdot \frac{4\mathrm{AB}^2-(1-6\mathrm{AB}^2+9\mathrm{AB}^4)}{4\mathrm{AB}^2}$$
$$= \frac{1}{16}(-9\mathrm{AB}^4+10\mathrm{AB}^2-1)$$
$\mathrm{AB}^2 = x$ とおくと
$$S^2 = \frac{1}{16}(-9x^2+10x-1) = \boldsymbol{-\frac{9}{16}x^2+\frac{5}{8}x-\frac{1}{16}}$$
この式を平方完成すると
$$S^2 = -\frac{9}{16}\left(x^2-\frac{10}{9}x\right)-\frac{1}{16} = -\frac{9}{16}\left\{\left(x-\frac{5}{9}\right)^2-\left(\frac{5}{9}\right)^2\right\}-\frac{1}{16}$$
$$= -\frac{9}{16}\left(x-\frac{5}{9}\right)^2+\frac{9}{16}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^2-\frac{1}{16}$$
$x=\mathrm{AB}^2>0$ より，S^2 が最大となるのは，$\boldsymbol{x = \frac{5}{9}}$ のときであり，$\mathrm{AB}>0$ より
$$\mathbf{AB} = \sqrt{x} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$
のときである。$S>0$ より，このときに面積 S も最大となる。

また，このとき
$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{1-3\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$
より $\cos\angle\mathrm{ABC}<0$ であるから，$\angle\mathrm{ABC}$ は**鈍角**である。 ⇨ ②

よって，$\angle\mathrm{ACB}$ と $\angle\mathrm{CAB}$ は**鋭角**である。 ⇨ ⓪

別解

辺と角の大きさの関係を用いて考えてもよい。

$\mathrm{AC}=2\mathrm{AB}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，$\mathrm{BC}=1$ であるから，$\frac{2\sqrt{5}}{3}>1>\frac{\sqrt{5}}{3}$ より，$\triangle\mathrm{ABC}$ における最大の辺は AC である。よって，最大の角は $\angle\mathrm{ABC}$ である。ここで
$$\mathrm{AC}^2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}$$
$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2+1^2 = \frac{14}{9}$$
であるから，$\mathrm{AC}^2>\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2$ より，$\angle\mathrm{ABC}$ は鈍角であり，$\angle\mathrm{ACB}$ と $\angle\mathrm{CAB}$ は鋭角である。

第２問

〔1〕

2 次関数
$$y = ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots ①$$
のグラフが，3 点 (100，1250)，(200，450)，(300，50) を通るとき
$$\begin{cases} 1250 = 10000a+100b+c & \cdots\cdots (\mathrm{A}) \\ 450 = 40000a+200b+c & \cdots\cdots (\mathrm{B}) \\ 50 = 90000a+300b+c & \cdots\cdots (\mathrm{C}) \end{cases}$$
が成り立つ。(A)－(B)，(C)－(B) より
$$800 = -30000a-100b \quad \cdots\cdots (\mathrm{D})$$
$$-400 = 50000a+100b \quad \cdots\cdots (\mathrm{E})$$
(D)＋(E) より
$$400 = 20000a$$
$$a = \frac{1}{50}$$

(D) より

$$\boldsymbol{b} = -300a - 8 = -300 \cdot \frac{1}{50} - 8 = -14$$

次に，売り上げ数を $f(x)$ とすると，利益は

$$(x-80)f(x) - 5000$$

すなわち

$$xf(x) - 80f(x) - 5000$$

となり，この式の次数は，最高次の項 $xf(x)$ の次数となる。

売り上げ数を①の右辺，つまり $f(x) = ax^2 + bx + c$ とすると

$$xf(x) = x(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$$

より，最高次の項の次数は 3 になるから，利益は x の **3 次式**となる。

一方で，利益が x の 2 次式となるのは，$(x-80)f(x)$ が 2 次式となるときだから，$f(x)$ が **1 次式**のときである。

1 次関数

$$y = -4x + 1160 \quad \cdots\cdots ②$$

を考える。$f(x)$ を②の右辺としたときの利益 z は

$$\boldsymbol{z} = (x-80)(-4x+1160) - 5000 = \boldsymbol{-4x^2 + 1480x - 97800}$$

この式を平方完成すると

$$z = -4(x^2 - 370x) - 97800 = -4\{(x-185)^2 - 185^2\} - 97800$$
$$= -4(x-185)^2 + 4 \cdot 185^2 - 97800 = -4(x-185)^2 + 39100$$

よって，z が最大となる x を p とおくと，$\boldsymbol{p} = 185$ であり，z の最大値は 39100 である。 $\cdots\cdots$ $(*)$

1 次関数

$$y = -8x + 1968 \quad \cdots\cdots ③$$

を考える。$f(x)$ を③の右辺としたときの利益は $x = 163$ のときに最大となり，最大値は 50112 となる。 $\cdots\cdots$ $(**)$

$f(x)$ を①の右辺とする。$100 \leqq x \leqq 300$ を満たすすべての x の値に対して，図 3 より，①のグラフは③のグラフよりも上側にあるので

$$f(x) > -8x + 1968$$

$100 \leqq x \leqq 300$ のとき，$x - 80 > 0$ であるから

$$(x-80)f(x) > (x-80)(-8x+1968)$$

よって，$x = 163$ としたときの利益を z_1 とすると，$(**)$ より

$$z_1 = (163-80)f(163) - 5000 > 50112$$

となるので，**$\boldsymbol{x} = 163$ とすれば，利益は少なくとも 50112 以上となる。** ⇨ ③

②のグラフについても同様に考える。$100 \leqq x \leqq 300$ を満たすすべての x の値に対して，図 3 より，①のグラフは②のグラフよりも上側にあるので

$$f(x) > -4x + 1160$$

$100 \leqq x \leqq 300$ のとき，$x - 80 > 0$ であるから

$$(x-80)f(x) > (x-80)(-4x+1160)$$

よって，$x = p = 185$ としたときの利益を z_2 とすると，$(*)$ より

$$z_2 = (185-80)f(185) - 5000 > 39100$$

となるので，**$\boldsymbol{x = p}$ とすれば，利益は少なくとも 39100 以上となる。** ⇨ ④

1 次関数

$$y = -6x + 1860 \quad \cdots\cdots ④$$

を考える。$100 \leqq x \leqq 300$ において，$f(x)$ を④の右辺としたときの利益は $x = 195$ のとき最大となり，最大値は 74350 となる。

$f(x)$ を①の右辺としたときの利益の最大値を M とする。前問の考察より

$$M \geqq z_1 > 50112$$

であるから，M は 50112 より大きい。

また，$100 \leqq x \leqq 300$ を満たすすべての x の値に対して，図 4 より，①のグラフは④のグラフよりも下側にあるので

$$f(x) < -6x + 1860$$

$100 \leqq x \leqq 300$ のとき，$x - 80 > 0$ であるから

$$(x-80)f(x) < (x-80)(-6x+1860)$$

よって，$100 \leqq x \leqq 300$ である x について

$$(x-80)f(x) - 5000 < 74350$$

が成り立つので，M は 74350 より小さい。

以上より，利益の最大値 M は **50112 より大きく 74350 より小さい。** ⇨ ②

研究

図 4 では，$x = 100$，300 で①のグラフと④のグラフが交わっているようにもみえるが，$f(x)$ を①の右辺とすると

$$f(100) = 1250,\ f(300) = 50$$

であり，それぞれ④の右辺に $x = 100$，300 を代入した値よりも小さいことから，$100 \leqq x \leqq 300$ を満たすすべての x の値に対して，①のグラフは④のグラフよりも下側にあることがわかる。

〔2〕

(1)　賛成ならば 1，反対ならば 0 であるから，$x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ は，賛成の人の数だけ 1 を足した数になる。よって，データの値の総和は，**賛成の人の数**に一致する。 ⇨ ⓪

したがって，平均値 $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ は，**n 人中における賛成の人の割合**である。 ⇨ ③

(2)　$m = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ とおくと，(1)より，m は賛成の人の数である。平均値は $\dfrac{m}{n}$ であり，分散 s^2 は

$$s^2 = \frac{1}{n}\left\{\left(x_1 - \frac{m}{n}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{m}{n}\right)^2 + \cdots + \left(x_n - \frac{m}{n}\right)^2\right\}$$

であるが，x_1，x_2，$\cdots$，x_n のうち，1 であるものは m 個あり，他の $(n-m)$ 個は 0 であるから

$$\boldsymbol{s^2 = \frac{1}{n}\left\{m\left(1 - \frac{m}{n}\right)^2 + (n-m)\left(0 - \frac{m}{n}\right)^2\right\}}$$ ⇨ ①，②

よって

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n}\left\{m\left(\frac{n-m}{n}\right)^2 + (n-m)\left(-\frac{m}{n}\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{n}\left\{\frac{m(n-m)^2}{n^2} + \frac{m^2(n-m)}{n^2}\right\} \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{m(n-m)\{(n-m)+m\}}{n^2} = \boldsymbol{\frac{m(n-m)}{n^2}} \end{aligned}$$ ⇨ ②

研究

本問では，0 と 1 の個数に着目して s^2 を式で表したが，$1^2 = 1$，$0^2 = 0$ より

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$$

であることを利用する考え方もある。

$$\begin{aligned} s^2 &= (2\text{ 乗したデータの平均}) - (\text{データの平均})^2 \\ &= \frac{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2}{n} - \overline{x}^2 = \frac{m}{n} - \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m(n-m)}{n^2} \end{aligned}$$

〔3〕

変量 x, y の組 $(-1,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(1,\ -1)$, $(1,\ 1)$ をデータ W とし，ここに $(5a,\ 5a)$ を加えたデータを W' とする。W' の x の平均値 $\overline{x}$ は

$$\boldsymbol{\overline{x}} = \frac{-1-1+1+1+5a}{5} = \frac{5a}{5} = \boldsymbol{a}$$ ⇨ ③

W' の y の平均値 $\overline{y}$ についても同様に $\overline{y}=a$ である。これより，表 1 の計算表は次のようになる。

x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
-1	-1	$-1-a$	$-1-a$	a^2+2a+1
-1	1	$-1-a$	$1-a$	a^2-1
1	-1	$1-a$	$-1-a$	a^2-1
1	1	$1-a$	$1-a$	a^2-2a+1
$5a$	$5a$	$4a$	$4a$	$16a^2$

よって，$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$ の和は $20a^2$ となるので，共分散 s_{xy} は

$$\boldsymbol{s_{xy}} = \frac{1}{5}\cdot 20a^2 = \boldsymbol{4a^2}$$ ⇨ ⓪

計算表より，x の標準偏差 s_x について

$$s_x{}^2 = \frac{1}{5}\{2(-1-a)^2+2(1-a)^2+(4a)^2\} = \frac{1}{5}(20a^2+4)$$
$$= 4a^2+\frac{4}{5}$$

ここで計算表より，$x-\overline{x}$ の五つの値と $y-\overline{y}$ の五つの値は同じであるため，x と y の標準偏差 s_x と s_y について，$s_x=s_y$ が成り立つ。よって

$$\boldsymbol{s_x s_y} = s_x{}^2 = \boldsymbol{4a^2+\frac{4}{5}}$$ ⇨ ②

相関係数が 0.95 以上となるのは

$$\frac{s_{xy}}{s_x s_y} \geqq 0.95$$
$$s_{xy} \geqq 0.95 s_x s_y$$
$$4a^2 \geqq \frac{19}{20}\left(4a^2+\frac{4}{5}\right)$$
$$4\left(1-\frac{19}{20}\right)a^2 \geqq \frac{19}{25}$$
$$\frac{1}{5}a^2 \geqq \frac{19}{25}$$
$$a^2 \geqq \frac{19}{5}$$

のときであるから

$$a \leqq -\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{5}},\quad \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{5}} \leqq a$$
$$\boldsymbol{a \leqq -\frac{\sqrt{95}}{5},\quad \frac{\sqrt{95}}{5} \leqq a}$$ ⇨ ③

第３問

(1)(i)　硬貨を 3 回投げ終えたとき，点 P が条件

$y_1 \geqq -1$ かつ $y_2 \geqq -1$ かつ $y_3 \geqq -1$ ……………………………… (∗)

を満たす移動の仕方を，図を用いて考える。

ある点における「移動の仕方の総数」は，矢印の前の点にある「移動の仕方の総数」の和となるので，条件 (∗) を満たす点 P の移動の仕方は，図 A のようになる。

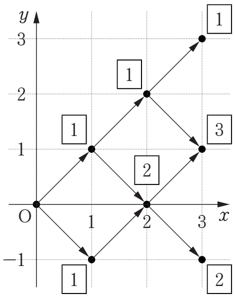


図 A

図 A より，点 $(3,\ 3)$ に至る移動の仕方は **1** 通りあり，点 $(3,\ 1)$ に至る移動の仕方は **3** 通りあり，点 $(3,\ -1)$ に至る移動の仕方は **2** 通りある。

よって，点 P の移動の仕方が条件 $(*)$ を満たすような硬貨の表裏の出方の総数は

$$1+3+2=6\ (\text{通り})$$

である。したがって，点 P の移動の仕方が条件 $(*)$ を満たす確率は

$$\frac{6}{2^3}=\frac{3}{4}$$

として求めることができる。

(ii)　硬貨を 4 回投げるとき，(i)と同様に図を用いて考えると，$y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3 \geqq 0$ かつ $y_4 \geqq 0$ を満たす点 P の移動の仕方は，図 B のようになる。

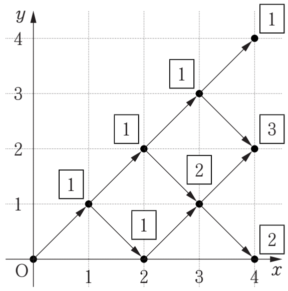


図 B

よって，その移動の仕方は

$$1+3+2=6\ (\text{通り})$$

であるから，その確率は

$$\boldsymbol{\frac{6}{2^4}}=\boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

となる。

また，図 B より $y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3=1$ となる点 P の移動の仕方は 2 通りであり，そこから硬貨が表であっても裏であっても $y_4 \geqq 0$ を満たす。よって，$y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3=1$ かつ $y_4 \geqq 0$ である確率は

「硬貨を 3 回投げて，$y_1 \geqq 0$ かつ
$y_2 \geqq 0$ かつ $y_3=1$ となる確率」

と等しくなるので

$$\frac{2}{2^3}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

さらに，$y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3 \geqq 0$ かつ $y_4 \geqq 0$ である事象を W，$y_3=1$ である事象を X とする。このとき，前問の結果より

$$P(W)=\frac{3}{8},\ P(W\cap X)=\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$$

であるから，$y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3 \geqq 0$ かつ $y_4 \geqq 0$ であったとき，$y_3=1$ である条件付き確率 $P_W(X)$ は

$$P_W(X)=\frac{P(W\cap X)}{P(W)}=\frac{2}{3}$$

(iii) 硬貨を 1 回投げると，硬貨の表裏によらず x 座標は 1 増加するから，y 座標だけを考える。

硬貨を 4 回投げ終えた時点で表が出た回数を m 回とおくと，裏が出た回数は $(4-m)$ 回である。点 P の座標が $(4, 2)$ であるとき，$y_4=2$ より

$$1\cdot m+(-1)\cdot(4-m)=2$$
$$m=3$$

よって，表の出る回数は **3** 回であり，裏の出る回数は $(4-3)$ 回，すなわち 1 回である。

(2)(i) さいころを 7 回投げて，3 の倍数が出る回数を n 回とすると，それ以外の目が出る回数は $(7-n)$ 回であるから，点 Q の座標が 3 になるとき

$$1\cdot n+(-1)\cdot(7-n)=3$$
$$n=5$$

3 の倍数が出る確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ であるから，求める確率は

$${}_7\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}\cdot\frac{2^2}{3^7}=\frac{28}{729}$$

(ii) 点 Q′ を，最初は xy 平面上の原点にあり，さいころを 1 回投げるごとに x 座標が 1 増加し，3 の倍数の目が出るごとに y 座標が 1 増加，それ以外の目が出るごとに y 座標が 1 減少する点と考える。

点 Q の座標は点 Q′ の y 座標と一致するので，(1)と同様にさいころを k 回投げ終えた時点での点 Q′ の座標を (k, y_k) とおくと，点 Q が条件を満たすことは，点 Q′ が

$$0\leqq y_k\leqq 3 \text{ かつ } y_7=3 \quad \cdots\cdots (**)$$

を満たすことと同値である。

(1)と同様に図を用いて考えると，(**) を満たす点 Q′ の移動の仕方は図 C のようになる。

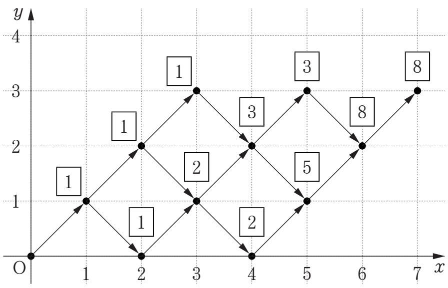


図 C

(i)より，点 Q の座標が 3 であるとき，3 の倍数の目は 5 回出ている。図 C より，$y_7=3$ となる移動の仕方は 8 通りであるから，求める確率は

$$8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{32}{2187}$$

(iii) (ii)の点 Q′ について，さいころを 7 回投げる間，$0\leqq y_k\leqq 3$ である事象を Y，$y_3=1$ である事象を Z とおく。点 Q′ の移動の仕方のうち，$Y\cap Z$ を満たすもののみを考えると，図 D のようになる。

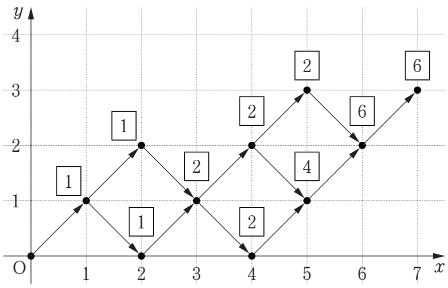


図 D

(ii)より，Y を満たす移動の仕方は 8 通りであるから，図 D より

$$P_Y(Z)=\frac{P(Y\cap Z)}{P(Y)}=\frac{3}{4}$$

第 4 問

(1)
$$7x+13y+17z=8 \quad \cdots\cdots ①$$
$$35x+39y+34z=37 \quad \cdots\cdots ②$$

①×5－② より

$$\mathbf{26}y+\mathbf{51}z=3 \quad \cdots\cdots ③$$

ここで

$$26y+51z=1$$

とすると，解の一つが $y=2$，$z=-1$ であるから

$$26\cdot 2+51\cdot(-1)=1$$

この両辺に 3 をかけると

$$26\cdot 6+51\cdot(-3)=3 \quad \cdots\cdots ③'$$

よって，$y=6$，$z=-3$ は③の整数解の一つであり，$z=\dfrac{3-26y}{51}$ より $y=1$，2，3，4，5 のときは③を満たす整数 z は存在しないから，y が正の整数で最小となる③の整数解は

$$y=6,\ z=-3$$

③－③′ より

$$26(y-6)+51(z+3)=0$$
$$26(y-6)=-51(z+3)$$

26 と 51 は互いに素であるから，$z+3$ は 26 の倍数である。

よって，k を整数とすると

$$z+3=26k$$

と表すことができる。このとき

$$z=-3+26k$$

である。また，これを③に代入して

$$26(y-6)=-51\cdot 26k$$
$$y=6-51k$$

よって，③のすべての整数解は，k を整数として

$$y=6-51k,\ z=-3+26k$$

と表される。これらを①に代入して

$$7x+13(6-51k)+17(-3+26k)=8$$
$$7x+78-51\cdot 13k-51+34\cdot 13k=8$$

$$7x = 17 \cdot 13k - 19$$
$$x = \frac{221k - 19}{7}$$
よって
$$\boldsymbol{x = \frac{7 \cdot 31k - 7 \cdot 3 + 4k + 2}{7} = 31k - 3 + \frac{4k+2}{7}}$$
となるので，x が整数になるのは，$4k+2$ が 7 の倍数となるときである。

k を 7 で割ったときの余りと，$4k+2$ を 7 で割ったときの余りは，次の表のようになる。

k	0	1	2	3	4	5	6
$4k+2$	2	6	3	0	4	1	5

よって，x が整数となるのは，k を 7 で割ったときの余りが **3** のときである。

(2) a を整数として

$$2x + 5y + 7z = a \quad \cdots\cdots ④$$
$$3x + 25y + 21z = -1 \quad \cdots\cdots ⑤$$

の場合を考える。⑤ − ④ より

$$x = -20y - 14z - 1 - a \quad \cdots\cdots ⑥$$

⑤ × 2 − ④ × 3 より

$$35y + 21z = -2 - 3a \quad \cdots\cdots ⑦$$
$$7(5y + 3z) = -(3a + 2)$$
$$5y + 3z = -\frac{3a+2}{7}$$

5 と 3 は互いに素であるから，⑦を満たす整数 y，z が存在するとき，$3a+2$ は 7 の倍数である。a を 7 で割ったときの余りと，$3a+2$ を 7 で割ったときの余りは，次の表のようになる。

a	0	1	2	3	4	5	6
$3a+2$	2	5	1	4	0	3	6

したがって

a を 7 で割ったときの余りが 4 である

ことは，⑦を満たす整数 y，z が存在するための必要十分条件であることがわかる。

このときの整数 y，z を⑥に代入すると，x も整数となり，④と⑤をともに満たす。

以上より，a の値によって，④と⑤を満たす整数 x，y，z が存在する場合としない場合があることがわかる。

(3) b を整数として

$$x + 2y + bz = 1 \quad \cdots\cdots ⑧$$
$$5x + 6y + 3z = 5 + b \quad \cdots\cdots ⑨$$

の場合を考える。⑨ − ⑧ × 5 より

$$-4y + (3 - 5b)z = b \quad \cdots\cdots ⑩$$

b を 4 で割ったときの余りと，$3-5b$ を 4 で割ったときの余りは，次の表のようになる。

b	0	1	2	3
$3-5b$	3	2	1	0

$-4y$ は 4 の倍数であるから，⑩の左辺を 4 で割ったときの余りは $(3-5b)z$ を

4 で割ったときの余りと等しい。右辺は b であるから，b を 4 で割ったときの余りで場合を分けて，左辺と右辺が等しくなる条件を考える。

(i)　余りが 0 のとき

$3-5b$ を 4 で割ったときの余りは 3 であるから，z を 4 の倍数とすれば，左辺，右辺ともに 4 で割ったときの余りが 0 となり**成り立つ**。

(ii)　余りが 1 のとき

$3-5b$ を 4 で割ったときの余りは 2 であるから，左辺は偶数，右辺は奇数となり，成り立たない。

(iii)　余りが 2 のとき

$3-5b$ を 4 で割ったときの余りは 1 であるから，z を 4 で割ったときの余りが 2 になる数とすれば**成り立つ**。

(iv)　余りが 3 のとき

$3-5b$ を 4 で割ったときの余りは 0 であるから，左辺は 4 の倍数，右辺は 4 で割ったときの余りが 3 となり，成り立たない。

以上より

b を 4 で割ったときの余りが 0 または 2 である

ことは，⑩を満たす整数 y，z が存在するための必要十分条件であることがわかる。

(4)　c を整数として

$$x+3y+5z=1 \quad \cdots\cdots ⑪$$

$$cx+3(c+5)y+10z=3 \quad \cdots\cdots ⑫$$

⑫ − ⑪ × c より

$$15y+5(2-c)z=3-c \quad \cdots\cdots ⑬$$

左辺は 5 の倍数であるから，右辺も 5 の倍数である。

よって，$3-c$ を 15 で割ったときの余りは，0，5，10 のいずれかである。すなわち，c を 15 で割ったときの余りは，3，8，13 のいずれかとなる。c，$2-c$，$3-c$ を 15 で割ったときの余りは，次の表のようになる。

c	3	8	13
$5(2-c)$	10	0	5
$3-c$	0	10	5

$15y$ は 15 の倍数であるから，⑬の左辺を 15 で割ったときの余りは $5(2-c)z$ を 15 で割ったときの余りと等しい。c を 15 で割ったときの余りによって場合を分けて，左辺と右辺が等しくなる条件を考える。

(i)　余りが 3 のとき

$5(2-c)$ を 15 で割ったときの余りは 10，$3-c$ を 15 で割ったときの余りは 0 であるから，z を 3 の倍数とすれば左辺も右辺もともに 15 の倍数となり，**成り立つ**。

(ii)　余りが 8 のとき

$5(2-c)$ を 15 で割ったときの余りは 0，$3-c$ を 15 で割ったときの余りは 10 であるから，左辺は 15 の倍数となるが，右辺は 15 で割ったときの余りが 10 となり，成り立たない。

(iii)　余りが 13 のとき

$5(2-c)$ を 15 で割ったときの余りは 5，$3-c$ を 15 で割ったときの余りも 5 であるから，**成り立つ**。

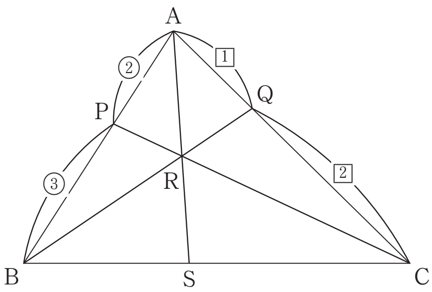
以上より

c を **15** で割ったときの余りが **3** または **13** である

ことは，⑪と⑫を満たす整数 x，y，z が存在するための必要十分条件であることがわかる。

第５問

(1)



△ABC において，チェバの定理より

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1$$

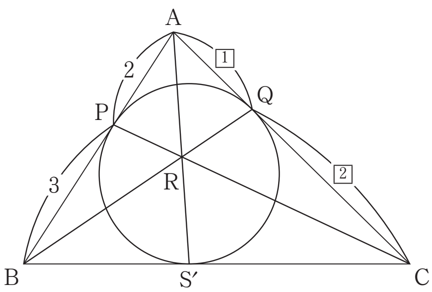
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SC}}\cdot\frac{2}{1}=1$$

$$\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SC}}=\frac{3}{4}$$

よって

$$\mathrm{BS}:\mathrm{SC}=3:4$$

より，点 S は辺 BC を **3：4** に内分する点である。



AB＝5 のとき

$$\mathrm{AP}=\frac{2}{5}\mathrm{AB}=\frac{2}{5}\cdot 5=2$$

$$\mathrm{PB}=\frac{3}{5}\mathrm{AB}=\frac{3}{5}\cdot 5=3$$

△ABC の内接円が辺 AB，AC とそれぞれ点 P，Q で接しているので，点 A から接点までの長さは等しく

$$\mathbf{AQ}=\mathrm{AP}=\mathbf{2}$$

AQ：QC＝1：2 より

$$\mathrm{QC}=2\mathrm{AQ}=2\cdot 2=4$$

内接円と辺 BC との接点を S′ とすると

$$\mathrm{BP}=\mathrm{BS'},\ \mathrm{QC}=\mathrm{S'C}$$

であるから

$$\mathbf{BC} = \mathrm{BS}' + \mathrm{S'C} = \mathrm{BP} + \mathrm{QC} = 3 + 4 = \mathbf{7}$$

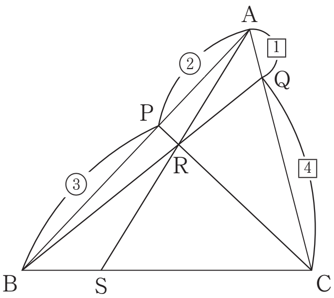
となる。したがって

$$\mathrm{BS} = \frac{3}{7}\mathrm{BC} = \frac{3}{7}\cdot 7 = 3$$

$$\mathrm{SC} = \frac{4}{7}\mathrm{BC} = \frac{4}{7}\cdot 7 = 4$$

であるから，BP ＝ BS，QC ＝ SC となり，点 S と点 S′ は一致する。よって，**点 S は △ABC の内接円と辺 BC との接点**であることがわかる。 ⇨ ②

(2)(i)



△ABQ と直線 PR において，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}}\cdot\frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{CA}} = 1$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}}\cdot\frac{4}{5} = 1$$

$$\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}} = \frac{15}{8}$$

よって，BR : RQ ＝ 15 : 8 より，点 R は辺 BQ を **15 : 8** に内分する。

次に，△APC と直線 QR において，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RP}}\cdot\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{BA}} = 1$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RP}}\cdot\frac{3}{5} = 1$$

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RP}} = \frac{20}{3}$$

よって，CR : RP ＝ 20 : 3 より，点 R は辺 CP を **20 : 3** に内分する。

ここで，辺 BC が共通なので

$$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{BPC} = \mathrm{AB} : \mathrm{PB} = 5 : 3$$

より

$$\triangle\mathrm{BPC} = \frac{3}{5}\triangle\mathrm{ABC}$$

となる。同様に，辺 BP が共通なので

$$\triangle\mathrm{BPC} : \triangle\mathrm{BPR} = \mathrm{PC} : \mathrm{PR} = (20 + 3) : 3$$

より

$$\triangle\mathrm{BPR} = \frac{3}{23}\triangle\mathrm{BPC} = \frac{3}{23}\cdot\frac{3}{5}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{9}{115}\triangle\mathrm{ABC} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる。また，辺 BC が共通なので

$$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{QBC} = \mathrm{AC} : \mathrm{QC} = 5 : 4$$

より

$$\triangle\mathrm{QBC} = \frac{4}{5}\triangle\mathrm{ABC}$$

となる。同様に，辺 QC が共通なので

$$\triangle\mathrm{QBC} : \triangle\mathrm{CQR} = \mathrm{QB} : \mathrm{QR} = (15 + 8) : 8$$

より

$$\triangle CQR = \frac{8}{23}\triangle QBC = \frac{8}{23}\cdot\frac{4}{5}\triangle ABC = \frac{32}{115}\triangle ABC \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

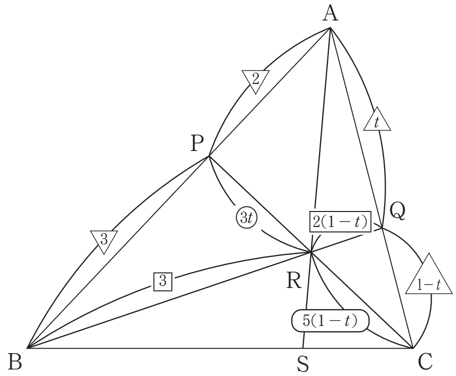
よって，①，②より

$$\frac{\textbf{△CQR の面積}}{\textbf{△BPR の面積}} = \mathbf{\frac{32}{9}}$$

(ii)　$0<t<1$ である実数 t を用いて，点 Q が辺 AC を $t:(1-t)$ に内分する，すなわち

$$AQ:QC = t:(1-t)$$

とおく。



(i)と同様に，△ABQ と直線 PR において，メネラウスの定理より

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BR}{RQ}\cdot\frac{QC}{CA}=1$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{BR}{RQ}\cdot\frac{1-t}{1}=1$$

$$\frac{BR}{RQ}=\frac{3}{2(1-t)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

△APC と直線 QR において，メネラウスの定理より

$$\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RP}\cdot\frac{PB}{BA}=1$$

$$\frac{t}{1-t}\cdot\frac{CR}{RP}\cdot\frac{3}{5}=1$$

$$\frac{CR}{RP}=\frac{5(1-t)}{3t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

よって，③，④より

$$BR:RQ = 3:2(1-t)$$

$$CR:RP = 5(1-t):3t$$

ここで，辺 BC が共通なので

$$\triangle ABC:\triangle BPC = AB:PB = 5:3$$

より

$$\triangle BPC = \frac{3}{5}\triangle ABC$$

となる。同様に，辺 BP が共通なので

$$\triangle BPC:\triangle BPR = PC:PR = \{5(1-t)+3t\}:3t = (5-2t):3t$$

より

$$\triangle BPR = \frac{3t}{5-2t}\triangle BPC = \frac{3t}{5-2t}\cdot\frac{3}{5}\triangle ABC \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

となる。また，辺 BC が共通なので

$$\triangle ABC:\triangle QBC = AC:QC = 1:(1-t)$$

より

$$\triangle QBC = (1-t)\triangle ABC$$

となる。同様に，辺 QC が共通なので

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{QBC}:\triangle\mathrm{CQR}&=\mathrm{QB}:\mathrm{QR}\\&=\{3+2(1-t)\}:2(1-t)\\&=(5-2t):2(1-t)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{CQR}&=\frac{2(1-t)}{5-2t}\triangle\mathrm{QBC}\\&=\frac{2(1-t)}{5-2t}\cdot(1-t)\triangle\mathrm{ABC}\\&=\frac{2(1-t)^2}{5-2t}\triangle\mathrm{ABC}\quad\cdots\cdots\text{⑥}\end{aligned}$$

となる。したがって，⑤，⑥より

$$\begin{aligned}\frac{\triangle\mathrm{CQR}}{\triangle\mathrm{BPR}}&=\frac{2(1-t)^2}{5-2t}\cdot\frac{5(5-2t)}{9t}\\&=\frac{10(1-t)^2}{9t}\end{aligned}$$

であるから，$\dfrac{\triangle\mathrm{CQR}}{\triangle\mathrm{BPR}}=\dfrac{1}{4}$ のとき

$$\frac{10(1-t)^2}{9t}=\frac{1}{4}$$

$$40(1-t)^2=9t$$

$$40t^2-89t+40=0$$

$$(8t-5)(5t-8)=0$$

$0<t<1$ より

$$t=\frac{5}{8}$$

よって

$$\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=\frac{5}{8}:\frac{3}{8}=5:3$$

であるから，点 Q は辺 AC を **5：3** に内分する点である。