第 1 問

〔1〕

(1)　$x=1\pm\sqrt{2}i$ を解とする x の 2 次方程式で x^2 の係数が 1 であるものを $x^2+ax+b=0$ とおくと，解と係数の関係より

$$a=-\{(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)\}=-2$$

$$b=(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=1-2i^2=3$$

であるから，求める 2 次方程式は

$$\boldsymbol{x^2-2x+3=0}$$

また，$S(x)=x^2-2x+3$ とし，$P(x)$ を $S(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると

$$\boldsymbol{P(x)=S(x)Q(x)+R(x)}$$　⇨ ③

が成り立つ。

ここで，$x=1+2i$ が $P(x)=0$ と $S(x)=0$ の解であることから

$$P(1+\sqrt{2}i)=0,\quad S(1+\sqrt{2}i)=0$$

であり

$$\boldsymbol{R(1+\sqrt{2}i)=0}$$

となる。よって，$R(x)=mx+n$ とおくと

$$m(1+\sqrt{2}i)+n=0$$

$$m+n+\sqrt{2}mi=0$$

m，n は実数であるから

$$m+n=0 \text{ かつ } \sqrt{2}m=0$$

$$\boldsymbol{m=0,\quad n=0}$$

であることがわかる。したがって

$$\boldsymbol{R(x)=0}$$　⇨ ③

であることがわかるので，$1-\sqrt{2}i$ も $P(x)=0$ の解である。

(2)　$P(x)=3x^4+2x^3+kx+\ell$ のとき，$P(x)$ を $S(x)=x^2-2x+3$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると

$$\boldsymbol{Q(x)=3x^2+8x+7}$$

$$\boldsymbol{R(x)=(k-10)x+\ell-21}$$

となる。$P(x)=0$ は $x=1+\sqrt{2}i$ を解にもつので，(1)の考察を用いると

$$R(1+\sqrt{2}i)=0$$

すなわち

$$k-10=0 \text{ かつ } \ell-21=0$$

$$\boldsymbol{k=10,\quad \ell=21}$$

である。このとき，$P(x)=S(x)Q(x)$ であり，$P(x)=0$ の解は

$S(x)=0$ の解と $Q(x)=0$ の解

であるから，$P(x)=0$ の $x=1+\sqrt{2}i$ 以外の解は，$S(x)=0$ より，(1)の

$$\boldsymbol{x=1-\sqrt{2}i}$$

と，$Q(x)=0$ より，$3x^2+8x+7=0$ の 2 解である

$$\boldsymbol{x=\frac{-4\pm\sqrt{5}i}{3}}$$

であることがわかる。

〔2〕

(1)　$N_1 = 285$ と $\log_{10} 2.85 = 0.4548$ より

$$\boldsymbol{\log_{10} N_1} = \log_{10}(2.85 \times 10^2) = \log_{10} 2.85 + \log_{10} 10^2 = \mathbf{0.4548} + \mathbf{2}$$
$$= 2.4548$$

であり，小数第 4 位を四捨五入して

$$p_1 = 2.455$$

また，$N_2 = 368 = 3.68 \times 10^2$ で，常用対数表より $\log_{10} 3.68 = 0.5658$ なので

$$\log_{10} N_2 = \log_{10}(3.68 \times 10^2) = 0.5658 + 2 = 2.5658$$

よって，小数第 4 位を四捨五入して

$$\boldsymbol{p_2} = \mathbf{2.566}$$

いま，N を正の実数とし，座標平面上の点 $(x,\ \log_{10} N)$ が直線 $y = k(x - 22) + p_1$ 上にあるとすると

$$\log_{10} N = k(x - 22) + p_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

ゆえに

$$\boldsymbol{N = 10^{k(x-22)+p_1}} \qquad ⇨ ②$$

が成り立つ。

(2)　(1)の考察より

$$k = \frac{p_2 - p_1}{25 - 22} = \frac{2.566 - 2.455}{3} = 0.037$$

である。$x = 32$ のとき

$$k(x - 22) + p_1 = 0.037(32 - 22) + 2.455 = 0.37 + 2.455 = 2.825$$

よって，$(*)$ に代入して

$$\log_{10} N = 2.825$$

となる。$N = q \times 10^2$ とおくと

$$\log_{10} q = 0.825$$

であり，常用対数表より，$\log_{10} 6.68 = 0.8248$，$\log_{10} 6.69 = 0.8254$ であるから

$$\log_{10} 6.68 < \log_{10} q < \log_{10} 6.69$$

である。よって，$x = 32$ のときの N の値は

$$668 < N < 669$$

すなわち

660 以上 670 未満 ⇨ ⑤

の範囲にある。

第２問

〔1〕

(1)　箱が作れるのは箱の縦，横，高さがすべて正の値であることが必要なので

$$9 - 2x > 0 \text{ かつ } 24 - 2x > 0 \text{ かつ } x > 0$$

すなわち

$$x < \frac{9}{2} \text{ かつ } x < 12 \text{ かつ } x > 0$$

であるから

$$\boldsymbol{0 < x < \frac{9}{2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。このとき，箱の容積 V は

$$V = (9 - 2x)(24 - 2x)x = (4x^2 - 66x + 216)x = \boldsymbol{4x^3 - 66x^2 + 216x}$$

であり，これを x で微分すると

$$V' = 12x^2 - 132x + 216 = 12(x - 2)(x - 9)$$

したがって，① における V の増減は次の表のようになる。

x	0		2		$\frac{9}{2}$
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

よって，V は $\boldsymbol{x=2}$ で最大値

$$(9-2\cdot 2)(24-2\cdot 2)\cdot 2=5\cdot 20\cdot 2=\mathbf{200}$$

をとる。

(2)　図 2 の右側二つの斜線部分の長方形の横の長さは厚紙の横の長さ 24cm の $\frac{1}{2}$ なので

$$24\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{12}\ (\mathrm{cm})$$ ➪ ③

箱の容積 W は

$$W=(9-2x)(12-x)x=\frac{1}{2}(9-2x)(24-2x)x=\frac{1}{2}V$$

W における x のとり得る値の範囲は

$$9-2x>0 \text{ かつ } 12-x>0 \text{ かつ } x>0$$

より，(1)の V における x のとり得る値の範囲と同じであるから，V が最大となるとき W も最大となる。

したがって，W の最大値は(1)で求めた V の最大値の $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ **倍である。** ➪ ④

また，W が最大値をとる x は**ただ一つあり，その値は $\boldsymbol{x_0}$ と等しい。** ➪ ②

(3)　厚紙の縦の長さを a，横の長さを b とすると

$$V=(a-2x)(b-2x)x$$

$$W=(a-2x)\left(\frac{b}{2}-x\right)x$$

ゆえに，a，b の値に関係なく

$$W=\frac{1}{2}V$$

であり，x のとり得る値の範囲は V，W とも同じなので，ふたのある箱の容積の最大値がふたのない箱の容積の最大値の $\frac{1}{2}$ 倍であることは，**縦と横の長さに関係なくどのような長方形のときでも成り立つ。** ➪ ④

〔2〕

(1)

$$\int_t^{t+1}\mathbf{1}\,d\boldsymbol{x}=\Big[x\Big]_t^{t+1}=\mathbf{1}$$

$$\int_t^{t+1}\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{x}=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_t^{t+1}=\frac{1}{2}\{(t+1)^2-t^2\}=\boldsymbol{t+\frac{1}{2}}$$

$$\int_t^{t+1}\boldsymbol{x^2}\,d\boldsymbol{x}=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_t^{t+1}=\frac{1}{3}\{(t+1)^3-t^3\}=\boldsymbol{t^2+t+\frac{1}{3}}$$

$f(x)=\ell x^2+mx+n$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_t^{t+1}f(x)\,dx&=\ell\int_t^{t+1}x^2\,dx+m\int_t^{t+1}x\,dx+n\int_t^{t+1}1\,dx\\&=\ell\left(t^2+t+\frac{1}{3}\right)+m\left(t+\frac{1}{2}\right)+n\\&=\ell t^2+(\ell+m)t+\frac{1}{3}\ell+\frac{1}{2}m+n\end{aligned}$$

となるから，t についての恒等式

$$t^2=\ell t^2+(\ell+m)t+\frac{1}{3}\ell+\frac{1}{2}m+n$$

が成り立つとき

$$\begin{cases} \ell = 1 \\ \ell + m = 0 \\ \dfrac{1}{3}\ell + \dfrac{1}{2}m + n = 0 \end{cases}$$

よって

$$\boldsymbol{\ell = 1,\ \ m = -1,\ \ n = \frac{1}{6}}$$

(2)　(1)より

$$\int_1^{1+1} f(x)\,dx = 1^2$$

$$\int_2^{2+1} f(x)\,dx = 2^2$$

$$\vdots$$

$$\int_{10}^{10+1} f(x)\,dx = 10^2$$

となるので，各辺の和をとって

$$\int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \cdots + \int_{10}^{11} f(x)\,dx = 1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2$$

よって

$$\boldsymbol{1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2 = \int_1^{11} f(x)\,dx}$$

が成り立つ。

第３問

以下，(白のカードの数，赤のカードの数) とする。

(1)　$X = 1$ となるのは

$$\left.\begin{array}{l} (1,\ 1) \\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4) \\ (2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (4,\ 1) \end{array}\right\}\ \textbf{7 通り}$$

$X = 2$ となるのは

$$\left.\begin{array}{l} (2,\ 2) \\ (2,\ 3),\ (2,\ 4) \\ (3,\ 2),\ (4,\ 2) \end{array}\right\}\ 5 \text{ 通り}$$

$X = 3$ となるのは

(3，3)，(3，4)，(4，3)　… 3 通り

$X = 4$ となるのは

(4，4)　… 1 通り

よって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{7}{16}$	$\boldsymbol{\frac{5}{16}}$	$\boldsymbol{\frac{3}{16}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{16}}$	1

また，$Y = 1$ となるのは

(1，1) … 1 通り

$Y = 2$ となるのは

(2，2)，(2，1)，(1，2) … 3 通り

$Y = 3$ となるのは

$$\left.\begin{array}{l}(3,\ 3)\\(3,\ 2),\ (3,\ 1)\\(2,\ 3),\ (1,\ 3)\end{array}\right\}\ 5\text{ 通り}$$

$Y=4$ となるのは

$$\left.\begin{array}{l}(4,\ 4)\\(4,\ 3),\ (4,\ 2),\ (4,\ 1)\\(3,\ 4),\ (2,\ 4),\ (1,\ 4)\end{array}\right\}\ 7\text{ 通り}$$

であるから，Y の確率分布は次の表のようになる。

Y	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{16}$	$\mathbf{\frac{3}{16}}$	$\mathbf{\frac{5}{16}}$	$\mathbf{\frac{7}{16}}$	1

つまり，確率変数 Z を $\boldsymbol{Z=5-X}$ とすると，Z の確率分布と Y の確率分布は同じである。

$5-X$	4	3	2	1	計
P	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

(2)　確率変数 X の平均（期待値）は

$$\boldsymbol{E(X)}=1\cdot\frac{7}{16}+2\cdot\frac{5}{16}+3\cdot\frac{3}{16}+4\cdot\frac{1}{16}=\mathbf{\frac{15}{8}}$$

であり，(1)の考察より，確率変数 Y の平均は

$$\boldsymbol{E(Y)}=E(5-X)=5-E(X)$$
$$=5-\frac{15}{8}=\mathbf{\frac{25}{8}}$$

また，確率変数 Y の標準偏差は

$$\boldsymbol{\sigma(Y)}=\sigma(5-X)=|-1|\sigma(X)=\boldsymbol{\sigma(X)}$$ ⇨ ③

となる。

(3)(i)　$t_2=2.50$ について，$\overline{X}=2.50$ となるのは，$X_1+X_2=5$ となる場合なので

$$(X_1,\ X_2)=(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$$

のときである。よって，(1)の確率分布より

$$\boldsymbol{P(\overline{X}=2.50)}=\frac{7}{16}\cdot\frac{1}{16}+\frac{5}{16}\cdot\frac{3}{16}+\frac{3}{16}\cdot\frac{5}{16}+\frac{1}{16}\cdot\frac{7}{16}$$
$$=2\left(\frac{7}{16\cdot16}+\frac{15}{16\cdot16}\right)=\mathbf{\frac{11}{64}}$$

であり，(1)の確率分布より

$$\boldsymbol{P(\overline{Y}=2.50)=P(\overline{X}=2.50)}$$ ⇨ ①

が成り立つことがわかる。

(ii)　$t_{100}=2.95$ について，n が大きいとき，$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N(E(\overline{X}),\ \{\sigma(\overline{X})\}^2)$ に従い

$$\boldsymbol{\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}}$$ ⇨ ②

である。$n=100$ は大きいので，$\overline{X}=2.95$ であったとすると，(2)より

$$\sigma(X)=\frac{\sqrt{55}}{8}$$

近似値 $\sqrt{55}=7.4$ を用いて

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\sqrt{55}}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{100}}=\frac{7.4}{8\cdot10}=\frac{3.7}{40}$$

である。推定される母平均を m_X として，m_X の信頼度 95% の信頼区間は

$$\overline{X}-1.96\cdot\sigma(\overline{X})\leqq m_X\leqq\overline{X}+1.96\cdot\sigma(\overline{X})$$

◀ $\dfrac{7+10+9+4}{16}=\dfrac{30}{16}$

◀確率変数 $5-X$ と確率変数 Y の確率分布が同じということ。

◀ $E(Y)$
$=1\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{3}{16}+3\cdot\frac{5}{16}$
$+4\cdot\frac{7}{16}$
$=\frac{1+6+15+28}{16}$
$=\frac{50}{16}=\frac{25}{8}$
と求めることもできるが，誘導を利用したい。

であり

$$1.96 \cdot \frac{3.7}{40} = 0.1813$$

より，m_X の信頼度 95% の信頼区間は

$$2.95 - 0.1813 \leqq m_X \leqq 2.95 + 0.1813$$

すなわち

$$2.7687 \leqq m_X \leqq 3.1313$$

よって，小数第 4 位を四捨五入して答えると

$$\mathbf{2.769 \leqq m_X \leqq 3.131} \quad \cdots\cdots ①$$

となる。 ⇨ ④，⑦

一方，$\overline{Y} = 2.95$ であったとすると，$\sigma(Y) = \sigma(X)$ なので，推定される母平均を m_Y として，m_Y の信頼度 95% の信頼区間は，m_X の信頼度 95% の信頼区間と同様にして

$$\mathbf{2.769 \leqq m_Y \leqq 3.131} \quad \cdots\cdots ②$$

となる。 ⇨ ④，⑦

また，(2)より，$E(X) = \frac{15}{8} = 1.875$ なので，$E(X)$ は ① の信頼区間に**含まれていない**。 ⇨ ①

さらに，(2)より，$E(Y) = \frac{25}{8} = 3.125$ なので，$E(Y)$ は ② の信頼区間に**含まれている**。 ⇨ ⓪

以上より，太郎さんの記憶については，**正しくないと判断され**，**メモに書かれていた t_2 と t_{100} は「確率変数 Y」の平均値である**。 ⇨ ①

第４問

(1) $a_1 = 23$，$a_{n+1} = a_n - 3$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項が 23，公差が -3 の等差数列なので

$$\boldsymbol{a_n} = 23 - 3(n-1) = \mathbf{-3n + 26}$$

となり，$a_n < 0$ を満たす最小の自然数 n は

$$-3n + 26 < 0$$

$$n > 8 + \frac{2}{3}$$

より，$n = \mathbf{9}$ である。

そして，等差数列の公差が -3 より，数列 $\{a_n\}$ は**つねに減少する**。 ⇨ ①

また，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくと，$a_n > 0$ となる n の範囲で S_n は増加するが，$a_n < 0$ となる範囲で S_n は減少するので，数列 $\{S_n\}$ は**増加することも減少することもある**。 ⇨ ②

$n \geqq 9$ のとき，$\boldsymbol{a_n < 0}$ である。 ⇨ ⓪

また，$b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくと，$n \geqq 9$ のとき，$b_n < 0$ で

$$b_9 = \frac{1}{a_9} = \frac{1}{-1} = -1 = -\frac{1}{1}$$

$$b_{10} = \frac{1}{a_{10}} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

のように分母の絶対値はつねに大きくなるので，数列 $\{b_n\}$ はつねに増加し，$\boldsymbol{b_n < b_{n+1}}$ である。 ⇨ ⓪

(2)　$c_1=30$，$d_n=\dfrac{1}{c_n-20}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ より

$$\boldsymbol{d_1}=\frac{1}{c_1-20}=\frac{1}{30-20}=\boldsymbol{\frac{1}{10}}$$

であり

$$c_n-20=\frac{1}{d_n}$$

よって

$$\boldsymbol{c_n=\frac{1}{d_n}+20}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

これと $c_{n+1}=\dfrac{50c_n-800}{c_n-10}$ より

$$\frac{1}{d_{n+1}}+20=\frac{50\left(\dfrac{1}{d_n}+20\right)-800}{\left(\dfrac{1}{d_n}+20\right)-10}$$

であるから

$$\frac{1}{d_{n+1}}=\frac{200d_n+50}{10d_n+1}-20=\frac{200d_n+50-20(10d_n+1)}{10d_n+1}=\frac{30}{10d_n+1}$$

よって

$$\boldsymbol{d_{n+1}}=\frac{10d_n+1}{30}=\boldsymbol{\frac{d_n}{3}+\frac{1}{30}}$$

が成り立つ。さらに

$$x=\frac{x}{3}+\frac{1}{30}$$

$$\frac{2}{3}x=\frac{1}{30}$$

$$x=\frac{1}{20}$$

より

$$d_{n+1}-\frac{1}{20}=\frac{1}{3}\left(d_n-\frac{1}{20}\right)$$

と変形でき，$d_1=\dfrac{1}{10}$ より，数列 $\left\{d_n-\dfrac{1}{20}\right\}$ は初項が

$$d_1-\frac{1}{20}=\frac{1}{10}-\frac{1}{20}=\frac{1}{20}$$

公比が $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$d_n-\frac{1}{20}=\frac{1}{20}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

であり，数列 $\{d_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{d_n=\frac{1}{20}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{20}}$$

である。したがって，$\dfrac{1}{20}\left(\dfrac{1}{30}\right)^{n-1}>0$ なので

$$\boldsymbol{d_n>\frac{1}{20}}$$ ⇨ ②

であり，$\dfrac{1}{20}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ は n が増加するとつねに減少するので，数列 $\{d_n\}$ は**つねに減少する**。 ⇨ ①

したがって，$c_n-20=\dfrac{1}{d_n}$ であるから，c_n-20 すなわち c_n はつねに増加し

$$c_1=30$$

であり，$d_{10}=\dfrac{1}{c_{10}-20}>\dfrac{1}{20}$ より

$$c_{10}<40$$

よって，$n=1$ から $n=10$ まで点 $(n,\ c_n)$ を図示すると ④ となる。　⇨ ④

第５問

(1)　A$(0,\ -3,\ 5)$，B$(2,\ 0,\ 4)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 0,\ 4)-(0,\ -3,\ 5)=(2,\ 3,\ -1)$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$=(0,\ -3,\ 5)+t(2,\ 3,\ -1)$$
$$=(2t,\ 3t-3,\ -t+5)$$

よって，点 P の座標は

$$\mathbf{P(2\boldsymbol{t},\ 3\boldsymbol{t}-3,\ -\boldsymbol{t}+5)}$$

と表すことができて，z 座標が 0 のときの点 P が点 C なので

$$-t+5=0$$

すなわち

$$t=5$$

より，点 C の座標は

$$\mathrm{C}(2\cdot5,\ 3\cdot5-3,\ 0)$$

ゆえに

$$\mathbf{C(10,\ 12,\ 0)}$$

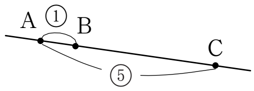
である。さらに，$t=5$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=5\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

であり



$$\mathrm{AC}:\mathrm{AB}=5:1$$

よって，点 C は線分 AB を **5 : 4** に外分する。

(2)　$\angle\mathrm{CPD}=120^\circ$ のとき

$$\overrightarrow{\mathbf{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{PD}}=|\overrightarrow{\mathrm{PC}}||\overrightarrow{\mathrm{PD}}|\cos120^\circ=\frac{-1}{2}|\overrightarrow{\mathbf{PC}}||\overrightarrow{\mathbf{PD}}| \quad \cdots\cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，0 でない実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と表すことができるので，① は

$$k\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=-\frac{1}{2}|k\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{PD}}| \quad \cdots\cdots ②$$

と表すことができる。また

$$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=(7,\ 4,\ 5)-(2t,\ 3t-3,\ -t+5)=(7-2t,\ 7-3t,\ t)$$

より

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{PD}}=2(7-2t)+3(7-3t)-1\cdot t=\mathbf{-7(2\boldsymbol{t}-5)}$$
$$|\overrightarrow{\mathbf{PD}}|^2=(7-2t)^2+(7-3t)^2+t^2=\mathbf{14(\boldsymbol{t}^2-5\boldsymbol{t}+7)}$$

② の両辺を 2 乗すると

$$k^2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}})^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2k^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|^2$$

であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=2^2+3^2+(-1)^2=14$$

より

$$k^2\{-7(2t-5)\}^2=\frac{1}{4}\cdot k^2\cdot14\cdot14(t^2-5t+7)$$

$k \neq 0$ より

$$49(2t-5)^2 = 49(t^2-5t+7)$$
$$4t^2-20t+25 = t^2-5t+7$$
$$3(t^2-5t+6) = 0$$
$$3(t-2)(t-3) = 0$$

したがって，② の両辺の 2 乗が等しくなるのは

$$t = \mathbf{2},\ \mathbf{3}$$

のときである。

$t=2$ のとき，$\mathrm{P}(4,\ 3,\ 3)$ であり

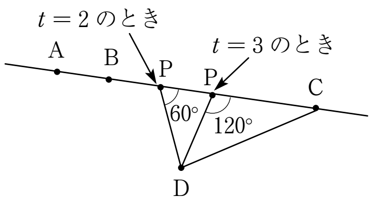
$$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = (6,\ 9,\ -3) = 3(2,\ 3,\ -1) = 3\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$t=3$ のとき，$\mathrm{P}(6,\ 6,\ 2)$ であり

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = (4,\ 6,\ -2) = 2(2,\ 3,\ -1) = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$t=2,\ 3$ は $\angle\mathrm{CPD}=120^\circ$，$\angle\mathrm{CPD}=60^\circ$ のいずれかに対応するが，$\triangle\mathrm{CPD}$ の角の大きさと辺の長さの関係に着目すれば，$\angle\mathrm{CPD}=120^\circ$ になるのは，PC の長さが短い場合であるから，求める点 P の座標は

$$\mathbf{P(6,\ 6,\ 2)}$$



(3)　$\overrightarrow{\mathrm{DP}} = -\overrightarrow{\mathrm{PD}} = (2t-7,\ 3t-7,\ -t)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + s\overrightarrow{\mathrm{DP}}$$
$$= (7,\ 4,\ 5) + s(2t-7,\ 3t-7,\ -t)$$
$$= (2st-7s+7,\ 3st-7s+4,\ -st+5)$$

Q は xy 平面上の点なので

$$-st+5=0$$

すなわち

$$st=5$$

よって

$$\overrightarrow{\mathbf{OQ}} = (2\cdot 5-7s+7,\ 3\cdot 5-7s+4,\ 0)$$
$$= (-7s+17,\ -7s+19,\ 0)$$
$$= (17,\ 19,\ 0)-7s(1,\ 1,\ 0)$$
$$= \mathbf{(17,\ 19,\ 0)-\frac{35}{\mathit{t}}(1,\ 1,\ 0)}$$

と表すことができる。

t が 0 以外の実数値を変化するとき，$\dfrac{35}{t}$ は 0 以外のすべての実数値をとる。

よって，点 Q が $(17,\ 19,\ 0)$ となることはないので，$\mathrm{R}(17,\ 19,\ 0)$ であり

$$\overrightarrow{\mathrm{DR}} = (17,\ 19,\ 0)-(7,\ 4,\ 5) = (10,\ 15,\ -5) = 5(2,\ 3,\ -1)$$
$$= 5\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{DR}}$ は $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ と平行である。　⇨ ④