第 1 問

〔1〕

(1)　$a=3$ のとき，3 の約数は 1，3 より，A の要素は 3 を約数にもつ自然数，つまり，3 の倍数である。また，A は U の部分集合であり，A の要素は 2 以上 20 以下の自然数であることをあわせると

$$\boldsymbol{A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}}$$　⇨ ⑥

同様に，$b=4$ のとき，4 の約数は 1，2，4 より，B の要素は 2 を約数にもつ自然数，つまり，2 の倍数である。また，B も U の部分集合であり，B の要素は 2 以上 20 以下の自然数であることをあわせると

$$\boldsymbol{B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}}$$　⇨ ⑧

よって，$A\cap B$ は，A と B の共通部分であるから

$$\boldsymbol{A\cap B=\{6,\ 12,\ 18\}}$$　⇨ ③

となる。また，$\overline{B}$ は U の要素のうち B の要素ではない自然数の集合なので

$$\overline{B}=\{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\}$$

となり，$A\cap\overline{B}$ は A と $\overline{B}$ の共通部分であるから

$$\boldsymbol{A\cap\overline{B}=\{3,\ 9,\ 15\}}$$　⇨ ②

である。

◀倍数の話に読み替えると考察しやすい。

◀4 を約数にもつ数は 2 を約数にもつ数に含まれる（4 の倍数は 2 の倍数に含まれる）。

◀$\overline{B}$ を書き出さなくても
$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$
$(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B})=\phi$
より，$A\cap\overline{B}$ の要素は集合 A の要素から $A\cap B$ の要素を除いたものと捉えてもよい。

(2)(i)　$\overline{A}$ の要素に，2 の倍数も 3 の倍数もないとき，A の要素には 2 の倍数と 3 の倍数がすべて含まれる。すなわち，a は 2 と 3 をともに約数にもつ。したがって，a は 6 の倍数で 2 以上 9 以下の自然数であるから

$$\boldsymbol{a=6}$$

である。

◀問題文にある「a，b が 2 以上 9 以下」という条件を見逃さないようにしよう。

(ii)　$A\cap\overline{B}=\{5\}$ であるとき，A の要素には 5 が含まれる。また，5 の約数は 1，5 より，a は 5 を約数にもつ。したがって，a は 5 の倍数で 2 以上 9 以下の自然数であるから

$$\boldsymbol{a=5}$$

である。このとき

$$A=\{5, 10, 15, 20\}$$

となり，$A\cap\overline{B}=\{5\}$ より

　$\overline{B}$ の要素に 5 を含むが，10，15，20 は含まない

すなわち

　B の要素には 10，15，20 を含むが，5 は含まない

これより，$b\neq 5$ であり，b は 2 と 3 をともに約数にもつ。

　したがって，(2)(i)より

$$\boldsymbol{b=6}$$

である。

◀$A\cap\overline{B}=\{5\}$ のとき，A も $\overline{B}$ も要素に 5 を含む。

◀5 は B の要素に含まれないので，$b\neq 5$ である。また
$10=2\cdot 5$
$15=3\cdot 5$
$20=2^2\cdot 5$
と素因数分解すると，$b\neq 5$ のとき，b は 2 と 3 をともに約数にもつことがわかる。

〔2〕

(1)　四角形 ABCD について，△ABD の面積 S_1，△BCD の面積 S_2 は

$$\boldsymbol{S_1}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin A=\boldsymbol{\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}{2}\sin A}$$　⇨ ①

$$\boldsymbol{S_2}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\sin C=\boldsymbol{\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}{2}\sin C}$$　⇨ ④

となる。

　四角形 ABCD の四つの内角の和は 360° であるから

© 2026 Z-kai Inc.

$$A+B+C+D=360^\circ$$

$A+C=B+D$ のとき

$$2(A+C)=360^\circ$$

よって

$$\boldsymbol{A+C=180^\circ} \qquad ⇨ ④$$

となる。このとき，$C=180^\circ-A$ であるから

$$\sin C=\sin(180^\circ-A)=\sin A$$

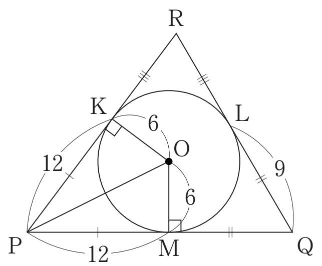
となり，四角形の面積 S は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}&=S_1+S_2\\&=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}{2}\sin A+\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}{2}\sin C\\&=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}{2}\sin A+\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}{2}\sin A\\&=\boldsymbol{\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}{2}\sin A}\quad\cdots\cdots\cdots\text{①}\end{aligned} \qquad ⇨ ②$$

となる。

◀$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$

(2)(i)　円 O の半径が 6，PK = 12，QL = 9 であるとき，次の図のようになる。



△PMO と △PKO に着目すると，PM，PK は円 O の接線であるから

$$\mathrm{PM}=\mathrm{PK}$$

である。また

$$\mathrm{OM}=\mathrm{OK}(=6),\ \mathrm{OP}\text{ は共通}$$

なので，△PMO ≡ △PKO である。四角形 PMOK の面積は，△PMO と △PKO の面積の和より

◀OM，OK はともに円 O の半径である。

$$\begin{aligned}(\text{四角形 PMOK})&=\triangle\mathrm{PMO}+\triangle\mathrm{PKO}\\&=2\triangle\mathrm{PMO}\\&=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PM}\cdot\mathrm{OM}\\&=12\cdot 6\\&=\mathbf{72}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}\end{aligned}$$

◀△PMO ≡ △PKO

◀OM ⊥ PM

であることがわかる。一方，∠PMO = ∠PKO = 90° より

$$\angle\mathrm{PMO}+\angle\mathrm{PKO}=\angle\mathrm{KPM}+\angle\mathrm{KOM}(=180^\circ)$$

よって，① を用いると

◀問題文の誘導にしたがって①を使う。まずは，①が適用できるかどうか確認する。

$$\begin{aligned}(\text{四角形 PMOK})&=\frac{\mathrm{PK}\cdot\mathrm{PM}+\mathrm{OK}\cdot\mathrm{OM}}{2}\sin P\\&=\frac{12\cdot12+6\cdot6}{2}\sin P\\&=90\sin P\end{aligned}$$

と表せる。これと，② より

$$90\sin P=72\quad\text{すなわち}\quad\boldsymbol{\sin P=\frac{4}{5}}$$

となることがわかる。

◀四角形 PMOK の面積が 2 通りに表せたので，方程式がつくれる。

四角形 QLOM についても同様に考えると，四角形 QLOM の面積は，

ⓒ 2026 Z-kai Inc.

△QMO と △QLO の面積の和より

$$\begin{aligned}(\text{四角形 QLOM}) &= \triangle\mathrm{QMO}+\triangle\mathrm{QLO}\\ &= 2\triangle\mathrm{QMO}\\ &= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{QM}\cdot\mathrm{OM}\\ &= 9\cdot 6\\ &= 54 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③\end{aligned}$$

であることがわかる。一方，$\angle\mathrm{QMO}=\angle\mathrm{QLO}=90^\circ$ より

$$\angle\mathrm{QMO}+\angle\mathrm{QLO}=\angle\mathrm{LQM}+\angle\mathrm{LOM}(=180^\circ)$$

よって，① を用いると

$$\begin{aligned}(\text{四角形 QLOM}) &= \frac{\mathrm{QL}\cdot\mathrm{QM}+\mathrm{OL}\cdot\mathrm{OM}}{2}\sin Q\\ &= \frac{9\cdot 9+6\cdot 6}{2}\sin Q\\ &= \frac{117}{2}\sin Q\end{aligned}$$

と表せる。これと，③ より

$$\frac{117}{2}\sin Q=54 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\sin Q=\frac{12}{13}}$$

となることもわかる。よって，△PQR で正弦定理より

$$\frac{\mathrm{QR}}{\sin P}=\frac{\mathrm{PR}}{\sin Q} \quad \text{すなわち} \quad \frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}=\frac{\sin Q}{\sin P}$$

より

$$\mathbf{PR:QR}=\sin Q:\sin P=\frac{12}{13}:\frac{4}{5}=\mathbf{15:13}$$

ここで，$\mathrm{RL}=\mathrm{RK}=x$ とおくと，$\mathrm{PR}=x+12$，$\mathrm{QR}=x+9$ であるから

$$(x+12):(x+9)=15:13$$

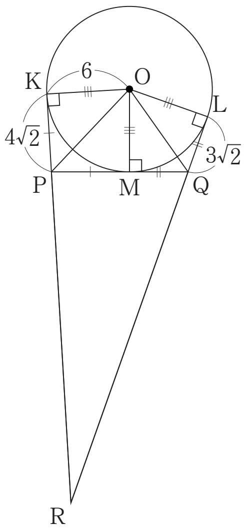
$$13(x+12)=15(x+9)$$

これを解くと

$$x=\frac{21}{2} \quad \text{つまり} \quad \mathbf{RL}=\boldsymbol{\frac{21}{2}}$$

と求められるので，△PQR の辺の長さを求めることができる。

(ii)　$\mathrm{PK}=4\sqrt{2}$，$\mathrm{QL}=3\sqrt{2}$ であるとき，図は次のようになる。



$\angle\mathrm{KPM}=P$，$\angle\mathrm{LQM}=Q$ とすると，(i) と同様にして，四角形 PMOK の面積は，△OKP と △OMP の面積の和より

$$(\text{四角形 PMOK})=\triangle\mathrm{OKP}+\triangle\mathrm{OMP}$$

◀△QMO ≡ △QLO であることに着目した。

◀$\sin P$ と $\sin Q$ の値を求めたことから，正弦定理を利用した。また，△PQR の底辺を PQ としたときの高さに着目して

$\mathrm{PR}\sin P=\mathrm{QR}\sin Q$

より，PR : QR を求めてもよい。

◀設定が少し変わっているが，(i) と同じ流れで考えることができる。

◀△OKP ≡ △OMP である。

ⓒ 2026 Z-kai Inc.

$= 2\triangle\mathrm{OKP}$

$= 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{OK}\cdot\mathrm{KP}$

$= 6\cdot 4\sqrt{2}$

$= 24\sqrt{2}$ ……………………………… ④

である。一方，$\angle\mathrm{OKP} = \angle\mathrm{OMP} = 90^\circ$ より

$$\angle\mathrm{OKP} + \angle\mathrm{OMP} = \angle\mathrm{KPM} + \angle\mathrm{KOM}(= 180^\circ)$$

よって，① を用いると

$$(\text{四角形 PMOK}) = \frac{\mathrm{PK}\cdot\mathrm{PM} + \mathrm{OK}\cdot\mathrm{OM}}{2}\sin P = \frac{4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2} + 6\cdot 6}{2}\sin P = 34\sin P$$

と表せる。これと，④ より

$$34\sin P = 24\sqrt{2} \quad \text{すなわち} \quad \sin P = \frac{12\sqrt{2}}{17}$$

である。

同様に，四角形 QLOM の面積は，$\triangle\mathrm{OLQ}$ と $\triangle\mathrm{OMQ}$ の面積の和より

$(\text{四角形 QLOM}) = \triangle\mathrm{OLQ} + \triangle\mathrm{OMQ}$

◀$\triangle\mathrm{OLQ} \equiv \triangle\mathrm{OMQ}$ である。

$= 2\triangle\mathrm{OLQ}$

$= 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{OL}\cdot\mathrm{LQ}$

$= 6\cdot 3\sqrt{2}$

$= 18\sqrt{2}$ ……………………………… ⑤

である。一方，$\angle\mathrm{OLQ} = \angle\mathrm{OMQ} = 90^\circ$ より

$$\angle\mathrm{OLQ} + \angle\mathrm{OMQ} = \angle\mathrm{LQM} + \angle\mathrm{LOM}(= 180^\circ)$$

よって，① を用いると

$$(\text{四角形 QLOM}) = \frac{\mathrm{QM}\cdot\mathrm{QL} + \mathrm{OM}\cdot\mathrm{OL}}{2}\sin Q = \frac{3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} + 6\cdot 6}{2}\sin Q = 27\sin Q$$

と表せる。これと，⑤ より

$$27\sin Q = 18\sqrt{2} \quad \text{すなわち} \quad \sin Q = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

である。

さて，$\angle\mathrm{QPR} = 180^\circ - P$，$\angle\mathrm{PQR} = 180^\circ - Q$ であるから

◀この議論は(ii)特有のもの。点 R が直線 PQ に対し点 O と反対側にあるために必要となる。この点に気をつけたい。

$$\sin\angle\mathrm{QPR} = \sin(180^\circ - P) = \sin P$$

$$\sin\angle\mathrm{PQR} = \sin(180^\circ - Q) = \sin Q$$

であり，$\triangle\mathrm{PQR}$ で正弦定理より

$$\frac{\mathrm{QR}}{\sin P} = \frac{\mathrm{PR}}{\sin Q} \quad \text{すなわち} \quad \frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}} = \frac{\sin Q}{\sin P}$$

より

$$\mathrm{PR} : \mathrm{QR} = \sin Q : \sin P = \frac{2\sqrt{2}}{3} : \frac{12\sqrt{2}}{17} = 17 : 18$$

$\mathrm{RK} = \mathrm{RL} = y$ とおくと，$\mathrm{PR} = y - 4\sqrt{2}$，$\mathrm{QR} = y - 3\sqrt{2}$ であるから

$$(y - 4\sqrt{2}) : (y - 3\sqrt{2}) = 17 : 18$$

$$18(y - 4\sqrt{2}) = 17(y - 3\sqrt{2})$$

これを解くと

$$y = 21\sqrt{2} \quad \text{つまり} \quad \mathbf{RL} = \mathbf{21\sqrt{2}}$$

と求められるので，$\triangle\mathrm{PQR}$ の辺の長さを求めることができる。

ⓒ 2026 Z-kai Inc.

第２問

〔1〕

(1)　$y = 2x^2 - 8x + 5$

　　$= 2(x-2)^2 - 3$

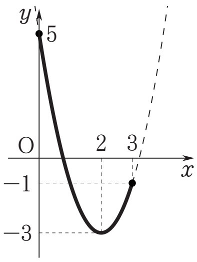
であり，$0 \leqq x \leqq 3$ において

　　$\boldsymbol{x = 0}$ で最大値 $\boldsymbol{5}$

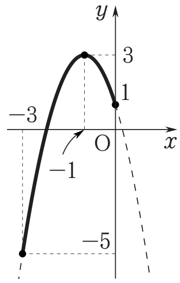
をとり

　　$\boldsymbol{x = 2}$ で最小値 $\boldsymbol{-3}$

をとる。



(2)(i)　条件１より，$y = f(x)$ は $-3 \leqq x \leqq 0$ において $x = -1$ で最大値 3 をとるから，グラフは上に凸の放物線で，頂点の座標は $(\boldsymbol{-1,\ 3})$ である。　⇨ ③



◀定義域の端（端点）ではない点で最大値をとることから，$y = f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であることがわかる。また，最大値に着目すると，頂点の座標もわかる。

　よって，$p(<0)$ を実数とし

　　$f(x) = p(x+1)^2 + 3$

とおくと，$x = -3$ で最小値 -5 をとることより

　　$p(-3+1)^2 + 3 = -5$

◀$f(-3) = -5$

よって

　　$p = -2$

これは $p < 0$ を満たすので

　　$\boldsymbol{f(x)} = -2(x+1)^2 + 3$

　　　$= \boldsymbol{-2x^2 - 4x + 1}$

である。

(ii)　条件２より，正の定数 a に対して，$y = g(x)$ の $0 \leqq x \leqq a$ における最小値 m は

・$0 < a < 3$ ならば，$m > -2$ である。

・$a \geqq 3$ ならば，$m = -2$ である。

◀$a \geqq 3$ のとき，m は常に -2 になることから，最小値をとる点は頂点であり，下に凸の放物線であることがわかる（上に凸の放物線だとしたら，a を大きくしていくと，どこかで最小値が減りはじめるはずである）。また，最小値に着目すると頂点の座標もわかる。

となるので，$y = g(x)$ のグラフは

　下に凸の放物線で，頂点の座標は $(3,\ -2)$　………①　⇨ ⓪

であることがわかる。

　さらに，条件２より，$y = g(x)$ の $0 \leqq x \leqq a$ における最大値 M は

・$0 < a \leqq 6$ ならば，$M = 7$ である。

・$a > 6$ ならば，$M > 7$ である。

となるので，$y = g(x)$ のグラフは点 $(0,\ 7)$ を通る。

◀点 $(6,\ 7)$ を通ることもわかる。

　よって，① より，$q(>0)$ を実数として

　　$g(x) = q(x-3)^2 - 2$

とおけて，点 $(0,\ 7)$ を通ることから

　　$q(0-3)^2 - 2 = 7$

◀$g(0) = 7$

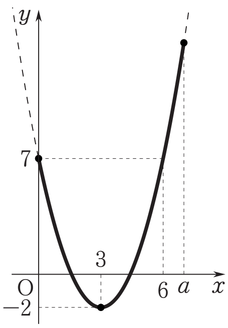
よって

　　$q = 1$

これは $q > 0$ を満たすので

　　$\boldsymbol{g(x)} = (x-3)^2 - 2$

　　　$= \boldsymbol{x^2 - 6x + 7}$　⇨ ⑥



である。

(3)　条件３より，$y = h(x)$ の $b-1 \leqq x \leqq b+1$ における最大値 M について

© 2026 Z-kai Inc.

・$1 \leqq b \leqq 7$ ならば $M \geqq 0$ である。

・$b < 1$ または $7 < b$ ならば $M < 0$ である。

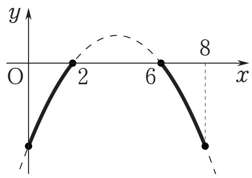
となるので，$y = h(x)$ のグラフは上に凸の放物線であることがわかる。

◀「$b < 1$ または $7 < b$」のとき $M < 0$ であることから，上に凸の放物線であることがわかる（下に凸の放物線だとしたら，b を大きくしていくと，どこかで $M \geqq 0$ となるはずである）。

ここで，$y = h(x)$ の定義域 $b - 1 \leqq x \leqq b + 1$ は

$b = 1$ のとき，$0 \leqq x \leqq 2$

$b = 7$ のとき，$6 \leqq x \leqq 8$



となることから，グラフが上に凸であることと，M の条件より

◀M の値の様子が切り替わる $b = 1$ のときと $b = 7$ のときの定義域に着目し，グラフと x 軸との共有点を考える。

$2 \leqq x \leqq 6$ のとき，$h(x) \geqq 0$

$x < 2$ または $6 < x$ のとき，$h(x) < 0$

とわかる。

よって，$y = h(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は **2** および **6** である。

〔2〕

(1)　(a)について，図 1 より，$T_{前}$ が 470 秒未満であり，$T_{後}$ が 460 秒以上である選手の人数は 7 人である。同様に，図 2 より，$T_{前}$ が 470 秒未満 であり，$T_{前後}$ が 460 秒以上である選手の人数は 3 人である。よって，(a)は誤り。

(b)について，図 1，2 より，A の選手について

$T_{前}$ の値は，450 秒より大きく 460 秒より小さい

$T_{前後}$ の値は，460 秒より大きく 470 秒より小さい

$T_{後}$ の値は，470 秒より大きく 480 秒より小さい

がいえる。これより，$T_{前} < T_{前後}$ と $T_{後} > T_{前後}$ が成り立つので，(b)は正しい。

⇨ ②

(2)　$T_{前}$ と $T_{前後}$ の相関係数は

$$\frac{(T_{前}\text{と}\ T_{前後}\text{の共分散})}{(T_{前}\text{の標準偏差})\times(T_{前後}\text{の標準偏差})} = \frac{72.9}{8.3\times 9.3} = \mathbf{0.94}\cdots$$

である。

⇨ ⑥

◀二つの変数 x，y について，x の標準偏差を s_x，y の標準偏差を s_y，x と y の共分散を s_{xy} とすると，x と y の相関係数は $\dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}$

(3)(i)　第 1 四分位数を Q_1，第 3 四分位数を Q_3 とおく。外れ値の定義より

$$\begin{cases} Q_1 - 1.5\times(Q_3 - Q_1) = 29.315 & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ Q_3 + 1.5\times(Q_3 - Q_1) = 29.835 & \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

② − ① より

$(Q_3 - Q_1) + 3(Q_3 - Q_1) = 0.52$

$4(Q_3 - Q_1) = 0.52$

$Q_3 - Q_1 = 0.13$

よって，四分位範囲 $Q_3 - Q_1$ は **0.13** 秒である。

◀第 3 四分位数と第 1 四分位数との差 $Q_3 - Q_1$ が四分位範囲なので，$Q_3 - Q_1$ の値を求めるのが目標になる。これを見越して式変形をしていく。

別解

計算は煩雑になるが，①，② より，Q_1，Q_3 の値を直接求めてもよい。①，② を解くと

$Q_1 = 29.51$，$Q_3 = 29.64$

となるため，四分位範囲は

$Q_3 - Q_1 = 29.64 - 29.51 = 0.13$

と求めることができる。

(ii)　(a)について，図 3 より，26 位の選手と 21 位の選手は，最小値が 29 秒より速いタイムであるが，外れ値となっていない。よって，誤り。

(b)について，12 位と 4 位の選手について，分散は 4 位の選手の方が大きいが，四分位範囲は 4 位の選手の方が小さい。よって，正しい。

⇨ ②

◀図 3 は，上から分散が小さい順になるように箱ひげ図を並べたものであることに注意する。他にも，5 位と 7 位の選手などで考えてもよい。

(iii)　図 3 より，決勝進出グループ（上位 1 位から 8 位）の選手の中で，30 個

© 2026 Z-kai Inc.

のタイムの分散が小さい方から 14 番目までの選手は 7 人である。よって

$$\boldsymbol{n} = 7$$

であることがわかる。したがって，表 2 は次のようになる。

		分散（小さい順）		計
		1 番〜14 番	15 番〜28 番	
順位	決勝進出グループ	7	1	8
	予選敗退グループ	7	13	20
計		14	14	28

表 2 より，決勝進出グループにおいて分散が小さい方から 14 番目までの選手が占める割合 P は

$$P = \frac{7}{8}$$

となり，予選敗退グループにおいて分散が小さい方から 14 番目までの選手が占める割合 Q は

$$Q = \frac{7}{20}$$

となる。したがって

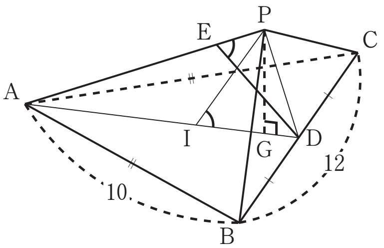
$$\boldsymbol{P > Q}$$ ⇨ ②

であることがわかる。

◀該当する選手は，分散が小さい順に，1 位，6 位，4 位，3 位，2 位，8 位，5 位の選手である。

第３問

(1)



まずは，△ABC に着目する。点 I は △ABC の内心より，直線 BI は ∠ABC を 2 等分する。 ⇨ ②

よって，△ABD において

$$\mathrm{AI} : \mathrm{ID} = \mathrm{BA} : \mathrm{BD} \quad \cdots\cdots ①$$

同様に，△ABC において，AB = AC と，直線 AD は ∠BAC を 2 等分することから

$$\mathrm{BD} = \frac{1}{2}\mathrm{BC} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

であり，① より

$$\mathrm{AI} : \mathrm{ID} = 10 : 6 = 5 : 3$$

また，△ABD は ∠ADB = 90° なので，三平方の定理より

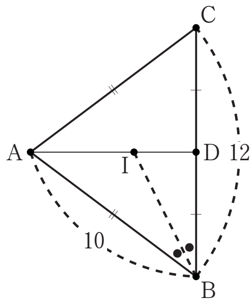
$$\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BD}^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$$

であるから

$$\mathbf{AI} = \frac{5}{8}\mathrm{AD} = \frac{5}{8} \cdot 8 = 5$$

$$\mathbf{ID} = \frac{3}{8}\mathrm{AD} = \frac{3}{8} \cdot 8 = 3$$

であることがわかる。



◀内接円の中心（内心）は，三角形の三つの内角の二等分線の交点である。

◀二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に二等分する。

◀△ABD は BD : DA : AB = 3 : 4 : 5 の直角三角形であることを活用してもよい。

Ⓒ 2026 Z-kai Inc.

次に，△ADP に着目する。仮定より，∠PED ＝ ∠PID であるから，円周角の定理の逆より，4 点 E，I，D，**P** は同一円周上にある。 ⇨ ④

よって，方べきの定理より

$$\mathbf{AE \cdot AP} = \mathrm{AI \cdot AD} = 5 \cdot 8 = \mathbf{40}$$

であることがわかる。

研究

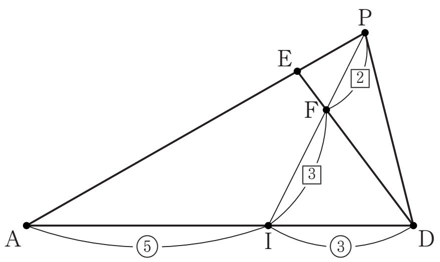
空間図形を扱うときは「適切な平面を抜き出して考察する」のが定石である。具体的には

- 図形の底面や側面
- 図形を切断した切り口（断面図）
- 展開図

などを意識し，問題に応じてどの平面に着目するとよいかを見定めよう。

冒頭では，点 A，B，D，I などが関係する図形を考察しているので，これらの点がある平面として △ABC に着目して考えるとよい。途中，点 E，I，D などが関係する図形を考察することになってからは，これらの点がある平面として △ADP に着目して考える。

(2)(i)　△ADP について，線分 PI と DE の交点を F とし，**仮定** 1 より IF : FP ＝ 3 : 2 であるとき，図は次のようになる。



このとき，△AIP と直線 DE について，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}} \cdot \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DI}} \cdot \frac{\mathrm{IF}}{\mathrm{FP}} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

であるから

$$\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}} = \frac{1}{4}$$

よって

$$\mathbf{PE : EA = 1 : 4}$$

であるから，$\mathrm{AE} = \frac{4}{5}\mathrm{AP}$ である。このとき，(1)より，$\mathrm{AE \cdot AP} = 40$ であるから

$$\frac{4}{5}\mathrm{AP \cdot AP} = 40$$

$$\mathrm{AP}^2 = 50$$

$\mathrm{AP} > 0$ より

$$\mathbf{AP = 5\sqrt{2}}$$

となる。

直線 PG が △ABC を含む平面に垂直であることから，三角錐 PABC の体積 V_1 は

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \triangle\mathrm{ABC} \cdot \mathrm{PG} \quad \cdots\cdots ②$$

である。ここで，△ABC の面積は

◀4 点 E，I，D，P について，直線 PD に対して同じ側に点 E，I があり，∠PED ＝ ∠PID ならば，4 点 E，I，D，P は同一円周上にある。

◀△ABC を底面，PG を高さとみる。

ⓒ 2026 Z-kai Inc.

$$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{BC}\cdot \mathrm{AD} = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8 = 48$$

である。また，点 G は △IBC の重心より，IG : GD ＝ 2 : 1 であるから，ID ＝ 3 より

◀ AD ⊥ BC より。

◀ 重心は中線を 2 : 1 の比に内分する。

$$\mathrm{IG} = \frac{2}{3}\cdot 3 = 2$$

直角三角形 PAG で三平方の定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{PG} &= \sqrt{\mathrm{AP}^2 - \mathrm{AG}^2}\\ &= \sqrt{\mathrm{AP}^2 - (\mathrm{AI}+\mathrm{IG})^2}\\ &= \sqrt{50-49}\\ &= 1\end{aligned}$$

◀ AI ＋ IG ＝ 5 ＋ 2 ＝ 7

である。よって，② より

$$\boldsymbol{V_1} = \frac{1}{3}\cdot 48\cdot 1 = \mathbf{16}$$

であることがわかる。

(ii) **仮定** 2 において，IF : FP ＝ 1 : 3 である。(i) と同様に，△AIP と直線 DE について，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DI}}\cdot\frac{\mathrm{IF}}{\mathrm{FP}} = 1 \quad すなわち \quad \frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{3} = 1$$

が成り立つから

$$\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}} = \frac{9}{8}$$

であり，$\mathrm{AE} = \frac{8}{17}\mathrm{AP}$ となる。このとき，(1)より，AE・AP ＝ 40 であるから

$$\frac{8}{17}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AP} = 40$$

$$\mathrm{AP}^2 = 85$$

となる。直角三角形 PAG で三平方の定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{PG} &= \sqrt{\mathrm{AP}^2 - \mathrm{AG}^2}\\ &= \sqrt{\mathrm{AP}^2 - (\mathrm{AI}+\mathrm{IG})^2}\\ &= \sqrt{85-49}\\ &= 6\end{aligned}$$

である。

ここで，**仮定** 1，**仮定** 2 いずれの場合についても，△ABC の面積は変わらないので

$$\boldsymbol{V_2 : V_1} = (\textbf{仮定 } 2 \text{ の場合の PG}) : (\textbf{仮定 } 1 \text{ の場合の PG}) = \mathbf{6 : 1}$$

◀ 二つの四面体は底面積が同じなので，高さの比が体積比になる。

であり，$\boldsymbol{V_2}$ **は** $\boldsymbol{V_1}$ **より大きい。** ⇨ ②

別解

V_2 を計算してもよい。② と同様にして

$$V_2 = \frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{PG} = \frac{1}{3}\cdot 48\cdot 6 = 96$$

となるから

$$V_2 : V_1 = 96 : 16 = 6 : 1$$

を得る。

ⓒ 2026 Z-kai Inc.

第４問

(1)(i)　A が 2 勝 0 敗で優勝するのは，A が B と C の両方に勝つときである。B と C の対戦については B と C のどちらが勝ってもよいので，求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 1 = \frac{4}{9}$$

(ii)　A が B に勝って 1 勝 1 敗となるのは，表 2 のように，A が B に勝ち，B が C に勝ち，C が A に勝つときであるから，その確率は

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

である。この**対戦結果**になり，かつ A が抽選により優勝者に選ばれる確率は，勝ち数が同じ A，B，C の 3 人で抽選をするから

$$\frac{1}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

である。一方，A が C に勝って 1 勝 1 敗となり，優勝する確率も同様に

$$\frac{1}{27}$$

なので，A が 1 勝 1 敗で優勝する確率は

$$\frac{1}{27} \times 2 = \frac{2}{27}$$

であることがわかる。

(i) と (ii) から，A が優勝する確率は

$$\frac{4}{9} + \frac{2}{27}$$

である。

(2)(i)　D が全敗する確率は

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1^3 = \frac{1}{6}$$

である。

さて，D が全敗し，かつ A が 2 勝 1 敗で優勝するときを考える。D 以外の A，B，C の 3 人の対戦に着目すると，3 人とも 1 勝 1 敗となり，3 人の抽選で A が優勝者に選ばれるときに条件を満たす。これは，A，B，C の 3 人のリーグ戦で A が 1 勝 1 敗となって優勝する確率に等しく，(1)(ii) より，その確率は $\frac{2}{27}$ である。よって，D が全敗し，かつ A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は

$$\frac{1}{6} \times \frac{2}{27} = \frac{1}{81}$$

全敗する人が B，C，D の 3 通りあることに注意すると，全敗する人がいる場合で，かつ A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は

$$\frac{1}{81} \times 3 = \frac{1}{27}$$

であることがわかる。

(ii)　A が 2 勝 1 敗で優勝するとき，A が B に負けた場合，B の勝ち数は 1 または 2 である。

（ア）B の勝ち数が 1 のとき，**対戦結果**は C が D に勝つ場合と，D が C に勝つ場合の 2 通りが考えられる。

	A	B	C	D	勝ち数	負け数
A		×	○	○	2	1
B	○		×	×	1	2
C	×	○		○	2	1
D	×	○	×		1	2

◀A が B，C に勝つ確率はそれぞれ $\frac{2}{3}$ であり，B と C が対戦してそれぞれが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ である。

◀A が C に勝ち，C が B に勝ち，B が A に勝って，A，B，C が 1 勝 1 敗となり，この 3 人の抽選で A が優勝者に選ばれるとき。

◀二つの事象は排反である。

◀A，B，C がそれぞれ D に勝つ確率の積である。A と B，B と C，C と A の対戦については，どのような勝敗でもよい。

◀A，B，C の 3 人の対戦と抽選についての確率を考察する。D との対戦の結果も含めると A，B，C の 3 人が 2 勝 1 敗で並んでいる。

◀全敗者が B，C，D のいずれであっても，A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は

$$\frac{1}{81}$$

である。

◀勝ち数 3 だと B が優勝することになる。

◀表を使って整理すると考えやすい。まずは，B が 1 勝 2 敗となる場合。

ⓒ 2026 Z-kai Inc.

	A	B	C	D	勝ち数	負け数
A		×	○	○	2	1
B	○		×	×	1	2
C	×	○		×	1	2
D	×	○	○		2	1

(イ) B の勝ち数が 2 のとき，**対戦結果**は B が A と C に勝つ場合と，B が A と D に勝つ場合の 2 通りが考えられる。

◀B が 2 勝 1 敗となる場合。

	A	B	C	D	勝ち数	負け数
A		×	○	○	2	1
B	○		○	×	2	1
C	×	×		○	1	2
D	×	○	×		1	2

	A	B	C	D	勝ち数	負け数
A		×	○	○	2	1
B	○		×	○	2	1
C	×	○		×	1	2
D	×	×	○		1	2

よって，A が 2 勝 1 敗で優勝する**対戦結果**は 2 通り考えられる。

(ア)，(イ) より，A が B に負けて A が 2 勝 1 敗で優勝するときの**対戦結果**は

$$2+2=4\ (\text{通り})$$

◀二つの事象は排反である。

ある。それぞれの確率は，A が B, C, D に勝つ確率が $\frac{2}{3}$ で，A 以外の 2 人が対戦するときに勝つ確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ であるから

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{54}$$

◀それぞれの対戦の結果になる確率の積を計算すればよい。

である。よって，最後の抽選で A が選ばれることを考慮し，A が B に負けて A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は

$$\frac{1}{54}\times4\times\frac{1}{2}=\frac{1}{27}$$

◀条件を満たす 4 通りの**対戦結果**について，いずれの場合も，抽選は 2 人で行われる。また，A が負ける相手が C, D の場合についても同様に確率を求めることができる。

A が負ける相手が B，C，D の 3 通りであることに注意すると，全敗する人がいない場合で，かつ A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は

$$\frac{1}{27}\times3=\frac{1}{9}$$

であることがわかる。

(i) と (ii) から，A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は

$$\frac{1}{27}+\frac{1}{9}$$

である。

以上のことから，A が優勝する確率は，A が 3 勝 0 敗で優勝する確率を考慮して

$$\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+\left(\frac{2}{3}\right)^3\times1^3=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$$

◀A が 3 勝 0 敗で優勝するとき，A は B, C, D に対してすべて勝つ。このとき，B，C，D 同士での対戦成績はどのようになってもよい。

であることがわかる。この確率は(1)で求めた 3 人でリーグ戦を行うときに A が優勝する確率 $\frac{4}{9}+\frac{2}{27}$ より，$\frac{2}{27}$ だけ小さい。 ⇨ ⓪

Ⓒ 2026 Z-kai Inc.