第1問

(1)　①を変形すると

$$x^2+2x+y^2-12y+25=0$$
$$(x+1)^2+(y-6)^2=12$$

となるから，C_1 の中心の座標は $(-1,\ 6)$ であり，C_1 の半径は $r_1=2\sqrt{3}$ である。

また，②を変形すると

$$x^2-2x+y^2-2y-25=0$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2=27$$

となるから，C_2 の中心の座標は $(1,\ 1)$ であり，C_2 の半径は $r_2=3\sqrt{3}$ である。

よって，C_1 の中心と C_2 の中心の間の距離を d とすると

$$d=\sqrt{(-1-1)^2+(6-1)^2}=\sqrt{29}$$

以上より

$$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$$

であるから，C_1 と C_2 は2点で交わることがわかる。

◀ x，y をそれぞれ平方完成する。

◀ $|r_1-r_2|=\sqrt{3}$
$r_1+r_2=5\sqrt{3}=\sqrt{75}$
2円の位置関係を調べるときは，2円の中心の間の距離と半径に注目する。

(2)(i)　$x=0$，$y=0$ のとき

$$2x-5y+25=2\cdot0-5\cdot0+25=25\geqq0$$

であるから，原点O(0, 0)は D に含まれる。　⇨ ⓪

$x=-1$，$y=6$ のとき

$$2x-5y+25=2\cdot(-1)-5\cdot6+25=-7<0$$

であるから，C_1 の中心 $(-1,\ 6)$ は E に含まれる。　⇨ ①

$x=1$，$y=1$ のとき

$$2x-5y+25=2\cdot1-5\cdot1+25=22\geqq0$$

であるから，C_2 の中心 $(1,\ 1)$ は D に含まれる。　⇨ ⓪

◀調べる点の x 座標，y 座標を $2x-5y+25$ に代入し，符号を調べる。

(ii)　$\mathrm{P}(x, y)$ とする。

x，y が①と②の両方を満たすとき，点Pは C_1 上にあり，かつ C_2 上にもある。このとき，x，y は④も満たすから，Pは ℓ 上にもある。

つまり，**点Pを C_1 上にあり，かつ C_2 上にもある点とすると，Pは ℓ 上にある**といえる。このことから，ℓ は C_1 と C_2 の二つの交点を通る直線であることがわかる。　⇨ ②

◀数式の条件を図形的な条件に読み替える。

(iii)　不等式 $x^2+y^2-7y+(2x-5y+25)<0$ の表す領域は円 C_1 の内部であり，(i)の領域 D は直線 ℓ 上および下側である。よって，これらの共通部分 F を図示すると，図1の斜線部である。ただし，境界線は C_1 の内部のみ含む。

また，不等式 $x^2+y^2-7y-(2x-5y+25)<0$ の表す領域は円 C_2 の内部であり，(i)の領域 E は直線 ℓ の上側である。よって，これらの共通部分 G を図示すると，図2の斜線部である。ただし，境界線を含まない。

◀領域 D を表す不等式は
$y\leqq\dfrac{2}{5}x+5$
と変形できる。また，直線 ℓ は，C_1 と C_2 の二つの交点を通る直線である。

◀領域 E を表す不等式は
$y>\dfrac{2}{5}x+5$
と変形できる。

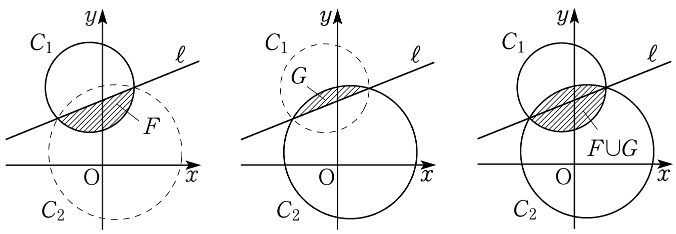


図1　図2　図3

　不等式③の表す領域は F と G の和集合であるから，これを図示すると，図 3 の斜線部である。ただし，境界線を含まない。 ⇨ ⓪

(iv)　不等式 $x^2+y^2-7y-(2x-5y+25)<0$ の表す領域と，(i)の領域 D の共通部分を F' とする。このとき，F' は円 C_2 の内部であり，かつ直線 ℓ 上および下側であるから，F' を図示すると，図 4 の斜線部である。ただし，境界線は C_2 の内部のみ含む。

◀ $2x-5y+25 \geqq 0$

　また，不等式 $x^2+y^2-7y+(2x-5y+25)<0$ の表す領域と，(i)の領域 E の共通部分を G' とする。このとき，G' は円 C_1 の内部であり，かつ直線 ℓ の上側であるから，G' を図示すると，図 5 の斜線部である。ただし，境界線を含まない。

◀ $2x-5y+25<0$

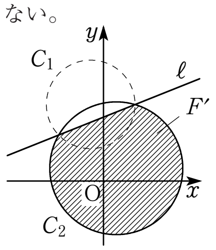


図 4

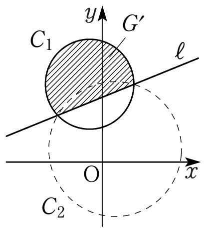


図 5

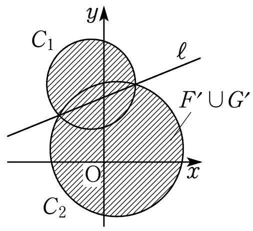


図 6

　不等式⑤の表す領域は F' と G' の和集合であるから，これを図示すると，図 6 の斜線部である。ただし，境界線を含まない。 ⇨ ④

第２問

(1)　二つの角 α, β に対し，加法定理から

$$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta} \quad \cdots\cdots ②$$

⇨ 1

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ③$$

である。②と③の左辺どうし，右辺どうしを加えると

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta \quad \cdots\cdots ④$$

ここで

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{A+B}{2},\quad \beta=\frac{A-B}{2}}$$

⇨ 4，5

とおくと

$$\alpha+\beta=A,\quad \alpha-\beta=B$$

となり，④に代入して

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

が得られる。

研究

①は和積の公式と呼ばれている。他にも，②と③の左辺どうし，右辺どうしをひき，α, β を同様に置き換えると

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

が得られる。

また，余弦の加法定理から

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ⑥$$

である。⑤と⑥の左辺どうし，右辺どうしを加え，α, β を同様に置き換えると

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

⑤と⑥の左辺どうし，右辺どうしをひき，α, β を同様に置き換えると

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

が得られる。

(2)　①において，$A=x+\frac{5}{12}\pi$, $B=x+\frac{\pi}{12}$ とすると

$$\boldsymbol{f(x)}=\sin\left(x+\frac{5}{12}\pi\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\boldsymbol{=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{6}}$$

⇨ 3，2

◀ $\frac{A+B}{2}=x+\frac{\pi}{4}$　$\frac{A-B}{2}=\frac{\pi}{6}$

$$=2\cos\frac{\pi}{6}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

と変形できる。$2\cos\frac{\pi}{6}\,(=\sqrt{3})$ は正の定数であるから，$0\leqq x<2\pi$ の範囲において，$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ が最大値をとるとき，$f(x)$ も最大値をとる。

◀ $2\cos\frac{\pi}{6}$ の符号に注意。

$$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$$

◀ $0\leqq x<2\pi$ より。

より，$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ は

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\ \text{つまり}\ x=\frac{\pi}{4}$$

で最大値 1 をとる。

よって，$f(x)$ は $\boldsymbol{x=\frac{\pi}{4}}$ で最大値

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}\cdot 1=\sqrt{\mathbf{3}}$$ ⇨ ③，⑥

をとる。

(3)(i)　①を用いると

$$\begin{aligned}\sin(x+a)+\sin(x+3a)&=2\sin(x+2a)\cos(-a)\\&=2\cos a\sin(x+2a)\end{aligned}$$

$2\cos a$ は定数であるから，$\sin(x+a)$，$\sin(x+2a)$，$\sin(x+3a)$ のうちの二つの関数の和 $\boldsymbol{\sin(x+a)+\sin(x+3a)}$ は，残りの関数 $\boldsymbol{\sin(x+2a)}$ の定数倍となる。 ⇨ ①，①

◀A，B として $x+a$，$x+2a$，$x+3a$ のうちどの二つを選んでも，$\dfrac{A-B}{2}$ は定数となる（x を含まない）。そこで，$\dfrac{A+B}{2}$ が残りの一つと等しくなるように A，B を選ぶ。

したがって，関数 $g(x)$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g(x)}&=\sin(x+a)+\sin(x+2a)+\sin(x+3a)\\&=2\cos a\sin(x+2a)+\sin(x+2a)\\&=\boldsymbol{(2\cos a+1)\sin(x+2a)}\end{aligned}$$ ⇨ ④

(ii)　(i)の結果より，$a=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$\begin{aligned}g(x)&=\left(2\cos\frac{5}{6}\pi+1\right)\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)\\&=(-\sqrt{3}+1)\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

ここで，$-\sqrt{3}+1<0$ であるから，$0\leqq x<2\pi$ の範囲において，$\sin\left(x+\dfrac{5}{3}\pi\right)$ が最小値をとるとき，$g(x)$ は最大値をとる。

◀$-\sqrt{3}+1<0$ の符号に注意。

$$\frac{5}{3}\pi\leqq x+\frac{5}{3}\pi<\frac{11}{3}\pi$$

◀$0\leqq x<2\pi$ より。

より，$\sin\left(x+\dfrac{5}{3}\pi\right)$ は

$$x+\frac{5}{3}\pi=\frac{7}{2}\pi \text{ つまり } x=\frac{11}{6}\pi$$

で最小値 -1 をとる。

よって，$g(x)$ は $\boldsymbol{x=\dfrac{11}{6}\pi}$ で最大値

$$g\left(\frac{11}{6}\pi\right)=(-\sqrt{3}+1)\cdot(-1)=\boldsymbol{\sqrt{3}-1}$$ ⇨ ⑧

をとる。

第３問

(1)(i)　$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+k$ より

$$\boldsymbol{f'(x)=x^2-4x+3}$$ ⇨ ②

$$=(x-1)(x-3)$$

これより，$f(x)$ の増減は次の表のようになる。

x		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$\boldsymbol{x=1}$ のとき，$f(x)$ は極大値

$$f(1)=\frac{1}{3}\cdot1^3-2\cdot1^2+3\cdot1+k$$

$$=\boldsymbol{\frac{4}{3}+k}$$ ⇨ ⑨

をとり，$\boldsymbol{x=3}$ のとき，$f(x)$ は極小値

$$f(3)=\frac{1}{3}\cdot3^3-2\cdot3^2+3\cdot3+k$$

$$=\boldsymbol{k}$$ ⇨ ⑤

をとる。

(ii)　$f(x)$ の増減より，$y=f(x)$ のグラフの概形は ⓪，②，④ のいずれかである。

$k=0$ のとき，極小値が

$$f(3)=0$$

であるから，$y=f(x)$ のグラフの概形は ② である。 ⇨ ②

また，$k>0$ のとき，極小値が

$$f(3)>0$$

であるから，$y=f(x)$ のグラフの概形は ⓪ である。 ⇨ ⓪

(iii)　$1<3$ より

$$\alpha=1$$

であり，$f(0)<0<f(1)$ を満たすような k の値の範囲は

$$k<0<\frac{4}{3}+k$$

$$\boldsymbol{-\frac{4}{3}<k<0}$$ ⇨ ⑧，⓪

である。このとき，$0\leqq x\leqq\beta$ の範囲における $y=f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積を S_1，$\beta\leqq x\leqq\alpha$ の範囲における $y=f(x)$ のグラフと x 軸および直線 $x=\alpha$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

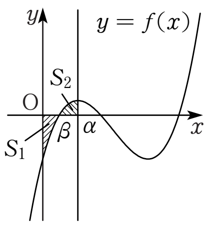
◀β は $0\leqq x\leqq\alpha$ の範囲において，$f(x)=0$ を満たす x の値である。

$$S_1=\int_0^\beta\{-f(x)\}\,dx$$

◀$0\leqq x\leqq\beta$ の範囲において $f(x)\leqq0$

$$S_2=\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$$

◀$\beta\leqq x\leqq\alpha$ の範囲において $f(x)\geqq0$



よって，$S_1=S_2$ のとき

$$\int_0^\beta\{-f(x)\}\,dx=\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$$

$$\int_0^\beta f(x)\,dx+\int_\beta^\alpha f(x)\,dx=0$$

$$\boldsymbol{\int_0^\alpha f(x)\,dx=0}$$ ⇨ ①

が成り立つ。

$$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + k\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + kx\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{12} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + k = \frac{11}{12} + k$$

◀$\alpha = 1$ より。

であるから，求める k の値は

$$\frac{11}{12} + k = 0$$
$$\boldsymbol{k} = \frac{-11}{12}$$

である。

(2)　条件(a)は，$y = g(x)$ のグラフが原点を通り，かつ原点におけるグラフの接線の傾きが正であることを意味している。したがって，条件(a)を満たす $y = g(x)$ のグラフの概形は ①，②，④ の三つであり，残りの五つは条件(a)を満たさない。

⇨ ①，②，④

◀点 $(t,\ g(t))$ における $y = g(x)$ のグラフの接線の傾きは $g'(t)$ である。

条件(b)は，$y = g(x)$ のグラフの接線の傾きが，$x = 0$ において最大または最小となることを意味している。したがって，条件(a)，(b)をともに満たす $y = g(x)$ のグラフの概形は ①，④ の二つであり，残りの六つは条件(a)，(b)の少なくとも一方を満たさない。

⇨ ①，④

◀接線の傾きが，① は $x = 0$ において最大であり，④ は $x = 0$ において最小である。② は原点付近に注目すると，接線の傾きが増加しており，$x = 0$ において最大でも最小でもない。

条件(b)，(c)は，$y = g(x)$ のグラフの接線の傾きが，$x = 0$ において最小となることを意味している。したがって，条件(a)，(b)，(c)のすべてを満たす $y = g(x)$ のグラフの概形は ④ の一つだけである。

⇨ ④

第４問

(1)(i)　$b_n = 4n - 1$ のとき

$$\boldsymbol{b_1} = 4 \cdot 1 - 1 = 3$$

よって，$b_1 = a_2 - a_1$ より

$$3 = a_2 - 1$$
$$\boldsymbol{a_2} = 4$$

◀ $a_1 = 1$

さらに

$$\boldsymbol{b_2} = 4 \cdot 2 - 1 = 7$$

よって，$b_2 = a_3 - a_2$ より

$$7 = a_3 - 4$$
$$\boldsymbol{a_3} = 11$$

◀ $a_2 = 4$

(ii)　2 以上の自然数 n について

$$a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$$
$$a_{n-1} - a_{n-2} = b_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$a_2 - a_1 = b_1$$

辺々の左辺どうし，右辺どうしをすべて加えると

$$(a_n - \cancel{a_{n-1}}) + (\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}}) + \cdots + (\cancel{a_2} - a_1) = b_{n-1} + b_{n-2} + \cdots + b_1$$
$$a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

よって

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k}$$

⇨ ⓪

が成り立つことから，2 以上の自然数 n について

$$\boldsymbol{a_n} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-1)$$
$$= 1 + \frac{\{3 + 4(n-1) - 1\}\cdot(n-1)}{2}$$
$$= 1 + (2n-1)(n-1)$$
$$= \boldsymbol{2n^2 - 3n + 2} \quad \cdots\cdots ③$$

◀$\sum_{k=1}^{n-1}(4k-1)$ は，初項 3，末項 $4(n-1)-1$，項数 $n-1$ の等差数列の和であり
$$\frac{\{(\text{初項})+(\text{末項})\}\cdot(\text{項数})}{2}$$
で求められる。Σ の公式を用いて
$$4\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2} - (n-1)$$
を計算してもよい。

◀③において $n=1$ とすると
$a_1 = 1$
となるから，③は $n=1$ のときも成り立つ。

(2)　$c_n = (pn+q)\cdot 2^n$ と表されるとき

$$\boldsymbol{c_{n+1} - c_n} = \{p(n+1)+q\}\cdot 2^{n+1} - (pn+q)\cdot 2^n$$
$$= [2\{p(n+1)+q\} - (pn+q)]\cdot 2^n$$
$$= \boldsymbol{\{pn + (2p+q)\}\cdot 2^n}$$

⇨ ⓪，⑤

よって，②と比較することで

$p=2$ かつ $2p+q=1$

つまり

$\boldsymbol{p=2,\ \ q=-3}$

のとき②が成り立つ。

以上のことから，数列 $\{d_n\}$ を階差数列とする数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$c_n = (2n-3)\cdot 2^n$

であるから，すべての自然数 n について

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} d_k} = c_{n+1} - c_1$$
$$= \{2(n+1)-3\}\cdot 2^{n+1} - (2\cdot 1 - 3)\cdot 2^1$$
$$= \boldsymbol{(2n-1)\cdot 2^{n+1} + 2}$$

⇨ ③

◀2 以上の自然数 n について成り立つ式
$\sum_{k=1}^{n-1} d_k = c_n - c_1$
の n を $n+1$ に置き換えた式は，すべての自然数 n について成り立つ。

(3)　$c_n = (sn^2+tn+u)\cdot 2^n$ と表されるとき

$$c_{n+1} - c_n = \{s(n+1)^2 + t(n+1) + u\}\cdot 2^{n+1} - (sn^2+tn+u)\cdot 2^n$$
$$= \{2s(n^2+2n+1) + 2t(n+1) + 2u - (sn^2+tn+u)\}\cdot 2^n$$
$$= \{sn^2 + (4s+t)n + (2s+2t+u)\}\cdot 2^n$$

◀$\{d_n\}$ の一般項が n の 2 次式と 2^n の積であることから，$\{c_n\}$ の一般項はこのように表されるのではないかと考える。

よって

$d_n = (n^2-n-1)\cdot 2^n$

と比較することで

$s=1$ かつ $4s+t=-1$ かつ $2s+2t+u=-1$

つまり

$s=1,\ \ t=-5,\ \ u=7$

のとき，数列 $\{c_n\}$ の階差数列は $\{d_n\}$ となる。

以上のことから，数列 $\{d_n\}$ を階差数列とする数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$c_n = (n^2-5n+7)\cdot 2^n$

であるから，すべての自然数 n について

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} d_k} = c_{n+1} - c_1$$
$$= \{(n+1)^2 - 5(n+1) + 7\}\cdot 2^{n+1} - (1^2 - 5\cdot 1 + 7)\cdot 2^1$$
$$= \boldsymbol{(n^2-3n+3)\cdot 2^{n+1} - 6}$$

⇨ ⑦

第５問

(1)　X は正規分布 $N(116,\ 25^2)$ に従うから

$$\boldsymbol{Y = \frac{X-116}{25}}$$

⇨ ①

とおくと，Y は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

◀確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，確率変数 $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

したがって，今年の受験者全体のうち，120 点以上である受験者の割合は

$$\begin{aligned} P(X \geqq 120) &= P(Y \geqq 0.16) \\ &= P(Y \geqq 0) - P(0 \leqq Y \leqq 0.16) \\ &= 0.5 - 0.0636 = 0.4364 \end{aligned}$$

より，およそ **0.44** である。 ⇨ ⑤

◀ $X \geqq 120$ のとき $\dfrac{X-116}{25} \geqq \dfrac{4}{25} = 0.16$

◀ $P(0 \leqq Y \leqq 0.16)$ は，正規分布表において，0.1 の行と 0.06 の列が交わったところの値である。

(2)(i)　表 1 より，W_i の平均 $E(W_i)$ は

$$E(W_i) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = \boldsymbol{p}$$ ⇨ ⓪

また，W_i の分散 $V(W_i)$ は

$$\begin{aligned} V(W_i) &= \{0 - E(W_i)\}^2(1-p) + \{1 - E(W_i)\}^2 p \\ &= p^2(1-p) + (1-p)^2 p \\ &= p(1-p)\{p + (1-p)\} \\ &= \boldsymbol{p(1-p)} \end{aligned}$$ ⇨ ③

(ii)　n が十分に大きいとき，標本平均 $\overline{W} = \dfrac{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}{n}$ は，近似的に正規分布 $N\left(E(W_i),\ \dfrac{V(W_i)}{n}\right)$ すなわち $\boldsymbol{N\left(p,\ \dfrac{p(1-p)}{n}\right)}$ に従う。

⇨ ⑦

帰無仮説「$p = 0.4$」が正しいとする。標本の大きさ $n = 400$ は十分に大きいので，標本平均 $\overline{W}$ は近似的に平均が 0.4，標準偏差が

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{10}\left(1 - \frac{4}{10}\right)}{400}} = \sqrt{\frac{6}{100^2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{100}}$$ ⇨ ②

の正規分布に従う。

$\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(0.4,\ \left(\dfrac{\sqrt{6}}{100}\right)^2\right)$ に従うから，$Z = \dfrac{\overline{W} - 0.4}{\frac{\sqrt{6}}{100}}$ とおくと，Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

したがって，$\sqrt{6} = 2.45$ として用いると

$$\begin{aligned} P\left(\overline{W} \geqq \frac{184}{400}\right) &= P\left(\overline{W} \geqq 0.46\right) \\ &= P\left(Z \geqq \frac{0.46 - 0.4}{\frac{\sqrt{6}}{100}}\right) = P(Z \geqq \sqrt{6}) \\ &= P(Z \geqq 2.45) \\ &= P(Z \geqq 0) - P(0 \leqq Z \leqq 2.45) \\ &= 0.5 - 0.4929 = \boldsymbol{0.0071} \end{aligned}$$ ⇨ ②

◀標準偏差は $\dfrac{\sqrt{6}}{100} = \dfrac{2.45}{100} = 0.0245$ より $Z = \dfrac{\overline{W} - 0.4}{0.0245}$ として $\dfrac{\overline{W} - 0.4}{0.0245} \geqq \dfrac{0.06}{0.0245} = 2.448\cdots$ であるから，$P(Z \geqq 2.45)$ を求めてもよい。

この値をパーセント表示した値 0.71% は有意水準 5% より**小さいから，帰無仮説は棄却される**。 ⇨ ①

◀帰無仮説「$p = 0.4$」はほとんど起こり得ないと判断されるということ。

したがって，有意水準 5% で A 地域における今年の資格試験の合格率は 0.4 より**高いと判断できる**。 ⇨ ⓪

(3)　標本の大きさ n を 400 から 100 へと $\dfrac{1}{4}$ 倍にしたとき，標本平均 $\overline{W}$ が近似的に従う正規分布は，平均は変化せず，標準偏差は 2 倍の

$$\frac{\sqrt{6}}{100} \cdot 2 = \frac{\sqrt{6}}{50}$$

になる。

◀平均 p が変化せず，標本の大きさ n が k 倍になるとき，標準偏差 $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ は $\dfrac{\sqrt{\frac{p(1-p)}{kn}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ より，$\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ 倍になる。

したがって，$\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(0.4,\ \left(\dfrac{\sqrt{6}}{50}\right)^2\right)$ に従うから，$Z' =$

$\dfrac{\overline{W}-0.4}{\frac{\sqrt{6}}{50}}$ とおくと，Z' は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，$\sqrt{6}=2.45$ として用いると

$$P\left(\overline{W} \geqq \frac{46}{100}\right)=P\left(\overline{W} \geqq 0.46\right)$$
$$=P\left(Z' \geqq \frac{0.46-0.4}{\frac{\sqrt{6}}{50}}\right)=P\left(Z' \geqq \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$
$$=P(Z' \geqq 1.225) \fallingdotseq P(Z' \geqq 1.23)$$
$$=P(Z' \geqq 0)-P(0 \leqq Z' \leqq 1.23)$$
$$=0.5-0.3907=0.1093$$

この値をパーセント表示した値 10.93% は有意水準 5% より**大きい**。 ⇨ ①

したがって，有意水準 5% で帰無仮説は**棄却されない**。 ⇨ ①

◀1.225 に近い値を 1.22 とし
$P(Z' \geqq 1.22)$
$=P(Z' \geqq 0)-P(0 \leqq Z' \leqq 1.22)$
$=0.5-0.3888=0.1112$
を求めてもよい。
また，標準偏差は
$0.0245 \cdot 2=0.049$
より
$Z'=\dfrac{\overline{W}-0.4}{0.049}$
として
$\dfrac{\overline{W}-0.4}{0.049} \geqq \dfrac{0.06}{0.049}$
$=1.224\cdots$
であるから，$P(Z' \geqq 1.22)$
を求めてもよい。

第６問

(1)　M が A と一致するとき，①は

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AA}+2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$
$$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}$$
$$=\overrightarrow{AE}$$

であるから，P は **E** と一致する。 ⇨ ④

◀$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{A●}$ の形をめざして変形する。

次に，M が D と一致するとき，①は

$$\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$$
$$=\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}-\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}\right)$$
$$=\overrightarrow{DB}$$

であるから，P は **B** と一致する。 ⇨ ①

◀$\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{D●}$ の形をめざして変形する。

別解

M が A と一致するとき，①は

$$\overrightarrow{AP}=\frac{-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{1-2}$$

であるから，P は線分 BC を 1 : 2 に外分する点，つまり E と一致する。

同様にして，M が D と一致するとき，①は

$$\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE}$$
$$=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{DB}$$

であるから，P は B と一致する。

◀ $2\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$
$=\dfrac{-2\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}}{1-2}$
$=\overrightarrow{DE}$

(2)　②の両辺を，A を始点とするベクトルを用いて表すと，左辺は

$$\boldsymbol{\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}}$$ ⇨ ②

となり，右辺は

$$\boldsymbol{a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}}=-a\overrightarrow{AM}+b\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}\right)+c\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}\right)$$
$$=\boldsymbol{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}+(-a-b-c)\overrightarrow{AM}}$$

⇨ ①，②，⑦

となる。したがって，②は

$$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}+(-a-b-c)\overrightarrow{AM}$$

より

$$\overrightarrow{\mathbf{AP}} = \boldsymbol{b}\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \boldsymbol{c}\overrightarrow{\mathbf{AC}} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})\overrightarrow{\mathbf{AM}}$$ ⇨ ①，②，⑨

と変形できる。

よって，M がどの位置にあっても，②を満たす P の位置が変わらないための必要十分条件は

$$1 - a - b - c = 0$$

すなわち

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \mathbf{1}$$ ⇨ ⑦

である。

◀A，B，C はすべて定点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ にのみ注目して考えればよい。

(3)　a，b，c が $a+b+c=1$ を満たすとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots\cdots ③$$

である。

(i)　a，b，c が $a+b+c=1$ と $a = \dfrac{1}{2}$ を満たすとき

$$2b + 2c = 1$$

このとき，③は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 2b \times \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2c \times \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$= 2b\overrightarrow{\mathrm{AJ}} + 2c\overrightarrow{\mathrm{AI}}$$

と表すことができるから，P が存在する範囲は**直線 IJ** である。 ⇨ ④

◀わかりにくければ，$2b = b'$，$2c = c'$ とおくとよい。
$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = b'\overrightarrow{\mathrm{AJ}} + c'\overrightarrow{\mathrm{AI}}$
かつ $b' + c' = 1$ より，P は直線 IJ 上の点であることがわかる。

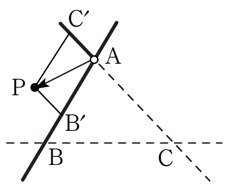
(ii)　a，b，c が $a+b+c=1$ と $c<0$ を満たすときについて考える。

$b\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB'}}$ とおくと，b はすべての実数をとり得るので，B′ の存在範囲は直線 AB である。

また，$c\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC'}}$ とおくと，$c<0$ より，C′ の存在範囲は，直線 AC 上の A を端点とする二つの半直線のうち C を含まない方である。ただし，A を含まない。

◀$c \neq 0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AC'}} \neq \vec{0}$ であるから，C′ は A と一致しない。

よって，③より，P が存在する範囲を図示すると，③ の灰色部分となる。ただし，境界線（直線 AB）を含まない。 ⇨ ③



◀$c \neq 0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AC'}} \neq \vec{0}$ であるから，P は直線 AB 上に存在しない。

第 7 問

(1)　$z = \sqrt{3} + i$ のとき

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \mathbf{2}$$

であり

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3})^2 - i^2} = \frac{\sqrt{3}-i}{4}$$

◀分母・分子に $\sqrt{3}+i$ と共役な複素数をかけて，分母を実数にする。

◀$i^2 = -1$

より

$$\boldsymbol{w} = z + \frac{1}{z} = \sqrt{3} + i + \frac{\sqrt{3}-i}{4} = \frac{\mathbf{5\sqrt{3}}}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{i}$$

である。

別解

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ より

$$w = z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \sqrt{3} + i + \frac{\sqrt{3} - i}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$$

と求めることもできる。

(2)(i)　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と表すとき

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\} = \frac{1}{r}\{\cos\theta - i\sin\theta\}$$

◀ $\frac{1}{z}$
$= \frac{\cos 0 + i\sin 0}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$
$= \frac{1}{r}\{\cos(0-\theta) + i\sin(0-\theta)\}$

より

$$\boldsymbol{w} = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= \boldsymbol{\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta} \quad \cdots\cdots ①$$

⇨ ⑥，⑨

したがって，θ の値によらず $\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = 0$ となるような r の値は

$$r - \frac{1}{r} = 0$$

$$r^2 = 1$$

$$r = 1$$

◀ $r > 0$

である。

別解

$w = z + \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ より

$$w = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{r(\cos\theta - i\sin\theta)}{r^2}$$

$$= \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

と求めることもできる。

(ii)　$r = 1$ とすると，①は

$$w = 2\cos\theta$$

となり，w は実数である。

そして，θ は実数全体を動くから

$$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$$

ゆえに

$$-2 \leqq w \leqq 2$$

よって，z が C 上を動くとき，w が描く図形は ① である。　⇨ ①

◀2 点 -2，2 を結ぶ線分である。

(iii)　$r \fallingdotseq 1$ とし，x，y を実数として $w = x + yi$ とおくと，①から

$$x = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta,\quad y = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

が成り立つ。$r \fallingdotseq 1$ より

$$\cos\theta = \frac{x}{r + \frac{1}{r}},\quad \sin\theta = \frac{y}{r - \frac{1}{r}}$$

◀$r \fallingdotseq 1$ のとき
$r + \frac{1}{r} \fallingdotseq 0$，$r - \frac{1}{r} \fallingdotseq 0$

から θ を消去すると，x，y は

$$\left(\frac{x}{r + \frac{1}{r}}\right)^2 + \left(\frac{y}{r - \frac{1}{r}}\right)^2 = 1$$

◀ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

つまり

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1}$$

⇨ ②

を満たし，z が C 上を動くとき，$w = x + yi$ はこの方程式の表す図形を描く。

◀w は楕円を描く。

(3)(i)　w^2 を z を用いて表すと

$$w^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2$$
$$= z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 \quad ⇨ ③$$
である。

(ii)　$r \neq 1$ とする。

z^2 は原点 O を中心とする半径 r^2 の円を描くから，X，Y を実数として $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = X + Yi$ とおくと，X，Y は，(2)(iii)の結果において x を X に，y を Y に，r を r^2 にそれぞれ置き換えた式，つまり

◀$|z^2| = r^2$ より。

◀(2)(iii) の結果を用いて考察することがポイント。

$$\frac{X^2}{\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)^2} = 1 \quad ⇨ ②$$

◀$z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ は楕円を描く。

を満たす。

(3)(i)の結果より，w^2 が描く図形は，複素数平面上の楕円

◀　$w^2 = z^2 + \dfrac{1}{z^2} + 2$

$$\frac{x^2}{\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)^2} = 1 \quad \cdots\cdots ③$$

を実軸方向に 2 だけ平行移動した楕円

$$\frac{(x-2)^2}{\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)^2} = 1$$

である。

ここで，③で表される楕円は，中心が原点であり

$$r^2 + \frac{1}{r^2} > \left|r^2 - \frac{1}{r^2}\right|$$

◀$r^2 - \dfrac{1}{r^2}$ は正の値をとることも負の値をとることもあるので，絶対値で考える。

より，長軸が実軸上にある。また，$r^2 > 0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係を用いると

$$r^2 + \frac{1}{r^2} \geqq 2\sqrt{r^2 \cdot \frac{1}{r^2}} = 2$$

であり，等号成立条件は

$$r^2 = \frac{1}{r^2}$$
$$r = 1$$

◀　$r > 0$

であるが，$r \neq 1$ より等号が成り立つことはない。ゆえに

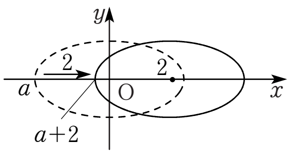
$$r^2 + \frac{1}{r^2} > 2$$

であるから，実軸の負の部分にある頂点を表す複素数の実部を a とすると

$$a = -\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right) < -2$$

を満たす。

したがって，③で表される楕円を実軸方向に 2 だけ平行移動した楕円は，中心が 2 であり，長軸が実軸上にあり，一つの頂点を表す複素数の実部は



$$a + 2 < 0$$

を満たすから，w^2 が描く図形として最も適当なものは ③ である。　⇨ ③