第 1 問

〔1〕

(1)　$k=1$，$n=3$ のとき，①の分母を有理化すると

$$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}-\mathbf{1}}=\frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{\mathbf{3}}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

となる。また，$1<\sqrt{3}<2$ より

$$1<\frac{\sqrt{3}+1}{2}<\frac{3}{2}$$

◀ $2<\sqrt{3}+1<3$

であるから，$\boldsymbol{a}=\mathbf{1}$ である。

(2)　$n=k^2+1$ のとき，①の分母を有理化すると

$$\frac{1}{\sqrt{k^2+1}-k}=\frac{\sqrt{k^2+1}+k}{\left(\sqrt{k^2+1}-k\right)\left(\sqrt{k^2+1}+k\right)}=\sqrt{k^2+1}+k$$

となる。ここで，$k^2<k^2+1$ であり，また，k^2+1，$(k+1)^2$ について，k が自然数のとき

$$(k+1)^2-(k^2+1)=k^2+2k+1-k^2-1=2k>0$$

より，$k^2+1<(k+1)^2$ が成り立つ。以上より，k が自然数のとき $k^2<k^2+1<(k+1)^2$ が成り立つことがわかるので

$$k<\sqrt{k^2+1}<k+1$$
$$2k<\sqrt{k^2+1}+k<2k+1$$

◀ $k>0$，$k+1>0$ であることにも注意する。

であるから，$\boldsymbol{a}=\mathbf{2}\boldsymbol{k}$ であることがわかる。　⇨ ③

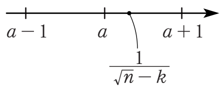
(3)　①の整数部分 a の値について，$a\leqq\dfrac{1}{\sqrt{n}-k}$ なので，$a\geqq k$ ならば

$$\frac{1}{\sqrt{n}-k}\geqq k\quad\cdots\cdots②$$

◀ ①の整数部分 a について

$$a\leqq\frac{1}{\sqrt{n}-k}<a+1$$

が成り立つ。



が成り立つ。また，$\dfrac{1}{\sqrt{n}-k}\geqq k$ ならば，k が自然数であること，および a が $\dfrac{1}{\sqrt{n}-k}$ を超えない最大の整数であることより，$a\geqq k$ が成り立つ。よって，$a\geqq k$ であるための必要十分条件は $\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{k}}\geqq\boldsymbol{k}$ である。　⇨ ②

②の両辺の逆数をとると，両辺は正なので

$$\sqrt{\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{k}\leqq\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}}\quad\cdots\cdots③$$
⇨ ⓪

◀ 不等号の向きが変わることに注意する。

となる。③より

$$\sqrt{n}\leqq k+\frac{1}{k}$$

となり，この両辺は正であるから，2 乗すると

$$n\leqq k^2+2+\frac{1}{k^2}\quad\cdots\cdots④$$

となる。よって，$\boldsymbol{m}=\mathbf{2}$ である。

$k=1$ のとき，$a\geqq k$ となる必要十分条件は，④より $n\leqq4$ となる。これと $n>k^2=1$ であることと合わせて，$a\geqq k$ となる n の個数は，$n=2$，3，4 の **3** 個である。

2 以上の k に対して，$a\geqq k$ となる必要十分条件は，④より $n\leqq k^2+2+\dfrac{1}{k^2}$ となる。ここで，$0<\dfrac{1}{k^2}<1$ より，n は k^2+2 以下の自然数である。また，$n>k^2$ であることと合わせて，$a\geqq k$ となる n の個数は，$n=k^2+1$，k^2+2 の **2** 個である。　⇨ ②

Ⓒ 2026 Z-kai Inc.

〔2〕

(1)(i)　$n=6$ のとき，余弦定理により

$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC} \quad \cdots\cdots ①$$
$$=\frac{9^2+5^2-6^2}{2\cdot 9\cdot 5}$$
$$=\frac{70}{2\cdot 9\cdot 5}=\frac{7}{9}$$

である。このことと，$0°<B<180°$ より $\sin B>0$ であることから

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{32}{9^2}}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

である。よって，△ABC の面積は

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin B \quad \cdots\cdots ②$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 5\cdot\frac{4\sqrt{2}}{9}=10\sqrt{2}$$

である。

(ii)　②および $AB=9$，$BC=5$ より，△ABC の面積が最大になるのは $\sin B$ の値が最も**大きい**ときである。また，$|\cos B|=\sqrt{1-\sin^2 B}$ より $|\cos B|$ の値が最も**小さい**ときである。　⇨ ①，⓪

$\cos B$ の値が負になるのは，①より $AB^2+BC^2-AC^2<0$ すなわち

$$9^2+5^2-n^2<0$$
$$n^2>106$$

$n>0$ より

$$n>\sqrt{106}$$

のときであり，$10<\sqrt{106}<11$，$5\leqq n\leqq 13$ より，$\boldsymbol{n=11,\ 12,\ 13}$ のときのみであることがわかる。　⇨ ⑦

花子さんの発言にあるように，n を 5 から 13 まで 1 ずつ増やしていくと，B は大きくなる。つまり，$\cos B$ は小さくなる。ここで

$n=10$ のとき　$|\cos B|=\left|\frac{9^2+5^2-10^2}{2\cdot 9\cdot 5}\right|=\left|\frac{6}{2\cdot 9\cdot 5}\right|=\frac{1}{15}$

$n=11$ のとき　$|\cos B|=\left|\frac{9^2+5^2-11^2}{2\cdot 9\cdot 5}\right|=\left|\frac{-15}{2\cdot 9\cdot 5}\right|=\frac{1}{6}$

より，△ABC の面積が最大となるのは，$\boldsymbol{n=10}$ のときのみである。⇨ ⑥

(iii)　正弦定理により

$$\frac{AB}{\sin C}=2R$$

が成り立つ。すなわち $R=\frac{9}{2\sin C}$ であるから，$\sin C$ の値が最も大きいとき，いいかえれば $|\cos C|$ の値が最も小さいとき，R の値が最も小さくなる。余弦定理により

$$\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2\cdot AC\cdot BC}$$
$$=\frac{n^2+5^2-9^2}{2\cdot n\cdot 5}$$
$$=\frac{n^2-56}{10n}$$

である。花子さんの発言にあるように，n を 5 から 13 まで 1 ずつ増やしていくと，C は小さくなる。つまり，$\cos C$ は大きくなる。また，$\cos C>0$ となるのは

$$n^2-56>0$$

$n>0$ より

◀$5\leqq n\leqq 13$ は △ABC の成立条件
$|AB-BC|<AC<AB+BC$
より導ける。

◀①を見ると，$\cos B$ の式の分母は一定で，$AC=n$ が大きくなると分子は小さくなる。よって，$\cos B$ は小さくなることがわかる。

◀$|\cos B|$ の値が最も小さいときを調べたいので，$\cos B$ の符号が入れ替わる前後に注目する。

◀$\cos C=\frac{n}{10}-\frac{28}{5n}$ より，n が大きくなると，$\frac{n}{10}$ は大きくなり，$\frac{28}{5n}$ は小さくなるから，$\cos C$ は確かに大きくなることがわかる。

© 2026 Z-kai Inc.

$$n > \sqrt{56}$$

のときであり，$7 < \sqrt{56} < 8$，$5 \leqq n \leqq 13$ より $n = 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13$ のときである。ここで

$n = 7$ のとき　$|\cos C| = \left|\dfrac{7^2 - 56}{10 \cdot 7}\right| = \left|\dfrac{-7}{70}\right| = \dfrac{1}{10}$

$n = 8$ のとき　$|\cos C| = \left|\dfrac{8^2 - 56}{10 \cdot 8}\right| = \left|\dfrac{8}{80}\right| = \dfrac{1}{10}$

であるから，R の値が最も小さくなるのは $\boldsymbol{n = 7,\ 8}$ のときのみである。

⇨ ④

◀ $|\cos C|$ の値が最も小さいときを調べたいので，$\cos C$ の符号が入れ替わる前後に注目する。

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'BC}$ の外接円の半径を R'，$\angle\mathrm{BA'C} = A'$ とすると，それぞれの三角形に正弦定理を適用して

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = 2R',\quad \frac{\mathrm{BC}}{\sin A'} = 2R'$$

が成り立つ。よって，$\sin A = \sin A'$ であるから

$$|\cos A| = |\cos A'|$$

が成り立つ。それぞれの三角形に余弦定理を適用すると

$$|\cos A| = \left|\frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC}}\right|$$

$$|\cos A'| = \left|\frac{\mathrm{A'B}^2 + \mathrm{A'C}^2 - \mathrm{BC}^2}{2 \cdot \mathrm{A'B} \cdot \mathrm{A'C}}\right|$$

となるから

$$\left|\frac{c^2 + 4^2 - a^2}{2 \cdot c \cdot 4}\right| = \left|\frac{c^2 + 5^2 - a^2}{2 \cdot c \cdot 5}\right|$$

a，c は $a \leqq c$ を満たす自然数であるから，$c^2 + 4^2 - a^2 > 0$，$c^2 + 5^2 - a^2 > 0$ であり

$$5(c^2 + 4^2 - a^2) = 4(c^2 + 5^2 - a^2)$$

$$c^2 - a^2 = 20$$

$$(c + a)(c - a) = 20$$

$c + a$，$c - a$ は 0 以上の整数であり，$c + a > c - a$ であること，および $c + a$，$c - a$ の偶奇は一致することにより

$$c + a = 10,\quad c - a = 2$$

よって

$$\boldsymbol{a = 4,\ c = 6}$$

である。

◀外接円の半径が等しいとのみ与えられていて，外接円が一致するとまでは与えられていない。つまり，参考図の状況のほかに，A と A′ は BC に関して反対側にある状況も考えられる。

◀ $c + a > c - a \geqq 0$ より
$(c + a,\ c - a)$
$= (20,\ 1),\ (10,\ 2),\ (5,\ 4)$
に絞られる。

第２問

〔1〕

(1)　1 日あたりの売り上げ数を w 個とすると，仮定より

$$w = ax + b\ (a,\ b \text{ は実数})$$

と表せる。$x = 100$ のとき $w = 160$，$x = 110$ のとき $w = 140$ であるから

$$\begin{cases} 100a + b = 160 \\ 110a + b = 140 \end{cases}$$

が成り立つ。この連立方程式を解くと $a = -2$，$b = 360$ となるから，$w = -2x + 360$，すなわち，1 日あたりの売り上げ数は $\boldsymbol{(-2x + 360)}$**個**となる。これは，$x = 130$ のとき $w = 100$ であることも満たす。

1 日の売り上げ数は負の数になることはないので，$w \geqq 0$ すなわち

$$-2x + 360 \geqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。①を解くと，$\boldsymbol{x \leqq 180}$ である。

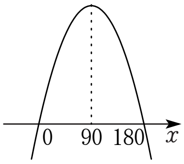
⇨ ⑤

© 2026 Z-kai Inc.

1 日あたりの売り上げ額を y 円とすると

$$y = x(-2x + 360) \quad \cdots\cdots ②$$
$$= -2x(x - 180)$$

となる。②のグラフを考えると，軸が y 軸に平行であり，x 軸と $x = 0$，180 で交わる上に凸の放物線である。



よって，y は $(0 <)x \leqq 180$ において

$$\boldsymbol{x} = \frac{0 + 180}{2} = \mathbf{90}$$

のときに最大値

$$-2 \cdot 90 \cdot (90 - 180) = \mathbf{16200} \qquad ⇨ ③$$

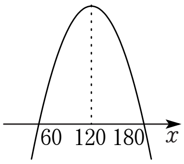
をとることがわかる。

◀ y の最大値をとる x の値および y の最大値については，②を
$$y = -2x^2 + 360x$$
$$= -2(x^2 - 180x)$$
$$= -2\{(x - 90)^2 - 8100\}$$
$$= -2(x - 90)^2 + 16200$$
と変形することにより求めることもできる。

(2)　クリームパン 1 個あたりの原価を 60 円とすると，クリームパン 1 個あたりの利益は $(x - 60)$ 円である。よって，1 日あたりの利益を z 円とすると

$$\boldsymbol{z = (x - 60)(-2x + 360)} \quad \cdots\cdots ③ \qquad ⇨ ⑥$$
$$= -2(x - 60)(x - 180)$$

となる。③のグラフを考えると，軸が z 軸に平行であり，x 軸と $x = 60$，180 で交わる上に凸の放物線である。



よって，z は $(60 <)x \leqq 180$ において

$$\boldsymbol{x} = \frac{60 + 180}{2} = \mathbf{120} \qquad ⇨ ④$$

のときに最大値

$$-2 \cdot (120 - 60) \cdot (120 - 180) = \mathbf{7200} \qquad ⇨ ④$$

をとることがわかる。

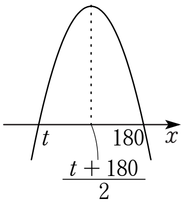
◀利益をあげることを考えているから，クリームパン 1 個の価格は原価より高くするのが合理的である。

◀ z の最大値をとる x の値および z の最大値については，③を
$$z = -2x^2 + 480x - 21600$$
$$= -2(x^2 - 240x) - 21600$$
$$= -2\{(x-120)^2 - 14400\} - 21600$$
$$= -2(x - 120)^2 + 7200$$
と変形することにより求めることもできる。

(3)　クリームパン 1 個あたりの原価を t 円とすると，1 日あたりの利益 z 円は

$$z = (x - t)(-2x + 360) \quad \cdots\cdots ④$$
$$= -2(x - t)(x - 180)$$

である。ここで，t を $0 < t < 180$ を満たす特定の値とし，x を $t < x \leqq 180$ の範囲で変化させると，(2)と同様に考えて，z は



$$x = \frac{t + 180}{2}$$

のときに最大値

$$-2 \cdot \left(\frac{t + 180}{2} - t\right) \cdot \left(\frac{t + 180}{2} - 180\right)$$
$$= \frac{(180 - t)^2}{2}$$

をとることがわかる。

◀ $x \leqq 180$ より，$t \geqq 180$ のとき $z \leqq 0$ なので，$t < 180$ で考察する。

　この値が 5000 以上ならば，クリームパン 1 個の価格 x 円を適切に決めることで，1 日あたりの利益を 5000 円以上にすることができる。すなわち

$$\frac{(180 - t)^2}{2} \geqq 5000$$
$$(180 - t)^2 \geqq 10000$$

ここで，$180 - t > 0$ であることより

$$180 - t \geqq 100$$
$$t \leqq 80$$

となるから，クリームパン 1 個あたりの原価が**80 円以下**ならば，利益を 5000 円以上にすることができる。

◀ここでも④を変形することにより，z の最大値をとる x の値および最大値を求めることができるが，式変形はかなり複雑になる。

◀ x は最も z が大きくなる $x = \dfrac{t + 180}{2}$ として考える。

〔2〕

(1)　データ A は大きさが 18 なので，第 1 四分位数は小さい方から 5 番目の値，

ⓒ 2026 Z-kai Inc.

第 3 四分位数は小さい方から 14 番目の値である。よって，データ A の第 1 四分位数は 32，第 3 四分位数は 47 であるから，四分位範囲は

$$47-32=15$$

である。したがって，データ A の外れ値は

$32-1.5\times 15=9.5$ 以下の値

$47+1.5\times 15=69.5$ 以上の値

であるから，すべてあげると**70 の一つ**である。 ⇨ ①

◀第 1 四分位数は表 1 の上の行のデータの中央値，第 3 四分位数は表 1 の下の行のデータの中央値に等しい。

(2)(i) データ A は大きさが 18 であるから，中央値 m_A は小さい方から 9 番目の値と 10 番目の値の平均値であり

$$\boldsymbol{m_A=\frac{44+45}{2}=44.5}$$ ⇨ ④

である。また，データ B は大きさが 17 であり，中央値 m_B は小さい方から 9 番目の値なので

$$\boldsymbol{m_B=44}$$ ⇨ ③

である。

◀データ A から 70 を除いた 17 個のデータの中央の値。

(ii) データ A の値の合計から，データ B の値の合計を除いたものは，外れ値の合計に一致する。つまり

$(データ\ A\ の値の合計)-(データ\ B\ の値の合計)=\mathbf{70}$ ……… ⑤

⇨ ①

である。$(データ\ A\ の値の合計)=18\overline{a}$，$(データ\ B\ の値の合計)=17\overline{b}$ であるから，①より

$$18\overline{a}-17\overline{b}=70$$

$$\boldsymbol{18\overline{a}=17\overline{b}+70}$$

が成り立つ。

(iii) 表 1 にある 18 チームの得点の総数は 771 より

$$\overline{a}=\frac{771}{18}=42.83\cdots\fallingdotseq 42.8$$

であり，外れ値を除いた 17 チームの得点の総数は $771-70=701$ より

$$\overline{b}=\frac{701}{17}=41.23\cdots\fallingdotseq 41.2$$

である。よって，$T_1=|\overline{a}-\overline{b}|\fallingdotseq 1.6$ である。

また，(2)(i)より $T_2=|m_A-m_B|=0.5$ である。

さらに，(1)より $Q_A=32$ である。また，データ B は大きさが 17 であり，第 1 四分位数 Q_B は小さい方から 4 番目の値と 5 番目の値の平均値なので

$$Q_B=\frac{31+32}{2}=31.5$$

である。よって，$T_3=|Q_A-Q_B|=0.5$ である。

以上より，T_1，T_2，T_3 の大小関係は

$$\boldsymbol{T_2=T_3<T_1}$$ ⇨ ④

である。

(3)(i) (a)について，図 1 より，得点総数が最も小さいチームの勝点はおよそ 38 であることがわかる。図 2 より，このチームの失点総数はおよそ 38 であり，最も大きくはない。よって，(a)は**誤り**である。

(b)について，得点総数の範囲は図 1 よりおよそ $70-29=41$ であり，失点総数の範囲は図 2 よりおよそ $57-35=22$ である。よって，得点総数の範囲は失点総数の範囲より大きいので，(b)は**正しい**。

◀範囲はデータの最大値と最小値の差である。横軸の目盛りのとり方が 2 つの散布図で異なることに注意。

(c)について，図 1 より，得点総数と勝点の分布には右上がりの傾向があり，正の相関があることが見てとれる。一方，図 2 より失点総数と勝点の

© 2026 Z-kai Inc.

分布には右上がりの傾向は見られず，これらの間には正の相関があるとはいえない。よって，(c)は**誤り**である。　⇨ ⑤

(ii)　相関係数の定義より

$$\frac{(\text{得失点差と勝点の共分散})}{(\text{得失点差の標準偏差})\times(\text{勝点の標準偏差})}$$

$$= \frac{125.1}{13.4\times 10.0} = 0.933\cdots \fallingdotseq \mathbf{0.93}$$　⇨ ⑥

である。

◀変量 x，y の標準偏差をそれぞれ s_x，s_y，共分散を s_{xy} とすると，相関係数 r_{xy} は
$r_{xy}=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$

第３問

(1)　三角形の重心は三つの中線の交点であるから，**直線 $\boldsymbol{\ell_1}$** 上にある。　⇨ ①

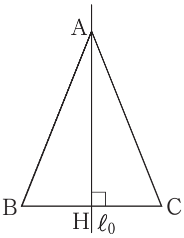
三角形の外心は三つの辺の垂直二等分線の交点であるから，**直線 $\boldsymbol{\ell_3}$** 上にある。　⇨ ③

◀中線は三角形の一つの頂点と対辺の中点を結ぶ線分である。

△ABC が AB＝AC となる二等辺三角形のとき，点 A を通り直線 BC と垂直に交わる直線 ℓ_0 と辺 BC との交点を H とすると，△ABH≡△ACH であるから

BH＝CH，∠BAH＝∠CAH

したがって，直線 AH すなわち ℓ_0 は，辺 BC の垂直二等分線であるから ℓ_1 および ℓ_3 に一致し，∠A を二等分するから ℓ_2 にも一致する。

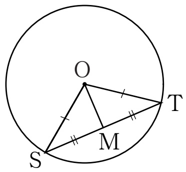


◀　∠AHB＝∠AHC＝90°
AB＝AC
AH は共通

よって，三つの直線 ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 のうち，直線 ℓ_0 と一致する直線は **$\boldsymbol{\ell_1}$ と $\boldsymbol{\ell_2}$ と $\boldsymbol{\ell_3}$ のすべてである**。　⇨ ⑦

(2)　線分 OS, OT はともに円 O の半径であるから OS＝OT である。ここで，弦 ST の中点 M に対して，△OMS≡△OMT であるから，∠OMS＝∠OMT である。3 点 S，M，T は同一直線上にあるから

∠OMS＝∠OMT＝**90**°



◀　OS＝OT
MS＝MT
OM は共通

となる。点 M を通り，OM に垂直な円 O の弦はただ一つであるから，中点が M となるような円 O の弦は**ちょうど一つある**ことがわかる。　⇨ ①

◀この考察は点 M と点 O が異なる場合にのみ成り立つ。点 M が点 O と一致するときは，中点が M となるような円 O の弦は無数にある。

(3)(i)　点 D は線分 AB の中点であるから，線分 CD は △ABC の中線である。点 G は △ABC の重心であるから，G は線分 CD 上にあり，重心の性質より

CG : GD＝2 : 1

である。

◀重心は中線を頂点の方から 2 : 1 に内分する。

ここで，OC は円 O の半径より OC＝6 である。また，△OAB は OA＝OB，∠AOB＝60° であるから，正三角形である。よって，OD＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$OA＝$3\sqrt{3}$ であるから

CD＝OC＋OD＝$6+3\sqrt{3}$

であり

CG＝$\frac{2}{3}$CD＝$\mathbf{4+2\sqrt{3}}$

となる。

(ii)　点 M の定義より，M は「点 P を一つの頂点とし，重心が G と一致する三角形における P の対辺の中点」と一致する。ここで，点 P が直線 CD 上にないとき，直線 PG 上に点 O がないことから，点 M と点 O は異なる。一方，直線 CD と円 O の交点のうち点 C と異なるものを E とし，点 P が E と一致するとする。このとき

◀PG＜CG であり
GM＝$\frac{1}{2}$PG，GD＝$\frac{1}{2}$CG
より，GM＜GD である。点 D は円 O の内部にあるから，点 M も円 O の内部にある。

ⓒ 2026 Z-kai Inc.

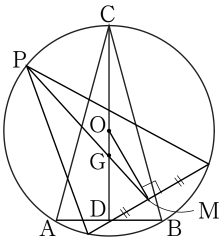
$\mathrm{EG}=\mathrm{CE}-\mathrm{CG}=8-2\sqrt{3}$

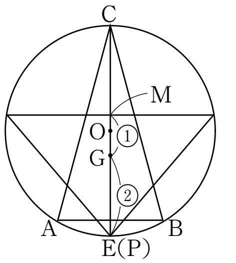
$\mathrm{OG}=\mathrm{CG}-\mathrm{CO}=2\sqrt{3}-2$

である。よって，EG : OG は 2 : 1 とはならないので，点 P が点 E と一致するときも点 M と点 O は異なる。よって，いずれの場合も，(2)より点 M を中点とする円 O の弦がちょうど一つあり，**条件を満たす三角形はちょうど一つある**。

以上より，**点 P をどこにとっても，条件を満たす三角形はちょうど一つある**。

⇨ ①

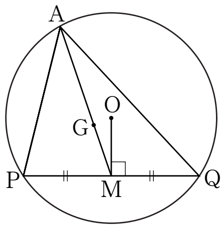


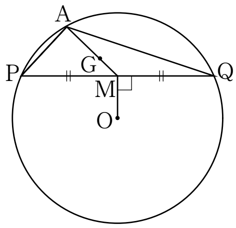


(4)　∠PAQ が鋭角または鈍角のとき，すなわち，△APQ が内接している円の中心を線分 PQ が通らないとき，PQ の中点を M とすると，M は円の中心と異なる。△APQ と △AP′Q′ の重心が一致するときは，二つの三角形は点 A を共有しているので，辺 PQ と辺 P′Q′ の中点は一致し，ともに M となるが，(2)より M を中点とする円の弦はちょうど一つである。したがって，G と G′ が一致するような異なる 4 点 P，Q，P′，Q′ のとり方は存在しない。よって，(a)，(c)は**偽**である。

◀∠PAQ が鋭角の場合と鈍角の場合をまとめて考察する。

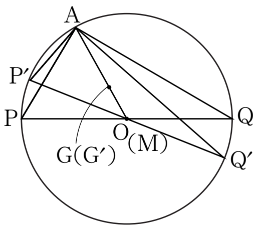
◀ここでも(2)の結論を利用する。





一方，線分 PQ が円の中心を通るとき，すなわち ∠PAQ が直角のとき，PQ の中点 M は円の中心 O に一致する。したがって，PQ と異なる円の直径を描き，その両端を P′，Q′ とすれば，辺 PQ と辺 P′Q′ の中点は一致し，G と G′ は一致する。よって，(b)は**真**である。

⇨ ⑤



第４問

(1)　$X=3$ となる確率は $\frac{5}{6}$ であり，$Z=3$ となる確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ である。二つのサイコロを投げる試行は独立であるから，$X=Z$ となる確率は

$$\frac{5}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{18}$$

である。

ⓒ 2026 Z-kai Inc.

(2)　問題文にある $E_{\mathbf{x}}$ の求め方により

$$E_{\mathbf{x}} = \frac{3+3+3+3+3+5}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

である。同様に

$$E_{\mathbf{y}} = \frac{1+1+4+4+4+4}{6} = \frac{18}{6}$$

$$E_{\mathbf{z}} = \frac{2+2+3+3+6+6}{6} = \frac{22}{6}$$

である。よって，期待値 $E_{\mathbf{x}}$，$E_{\mathbf{y}}$，$E_{\mathbf{z}}$ が満たす不等式は

$$\boldsymbol{E_{\mathbf{y}} < E_{\mathbf{x}} < E_{\mathbf{z}}}$$ ⇨ ②

である。

◀期待値の定義に従って $E_{\mathbf{x}} = 3\times\frac{5}{6} + 5\times\frac{1}{6} = \frac{10}{3}$ と求めることもできる。

◀本問の考察によると，サイコロ $\mathbf{z}$ が最も大きい目が出やすいと解釈されることになる。

(3)　$X=3$ となる確率は(1)より $\frac{5}{6}$ であり，$Y=4$ となる確率は $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ である。二つのサイコロを投げる試行は独立であるから

$$\boldsymbol{P(X<Y)} = \frac{5}{6}\times\frac{2}{3} = \frac{5}{9}$$

である。

また，$Y<Z$ となるのは，「$Y=1$」または「$Y=4$ かつ $Z=6$」のときである。$Y=1$，$Y=4$，$Z=6$ となる確率はそれぞれ $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ である。二つの事象は互いに排反であるから

$$\boldsymbol{P(Y<Z)} = \frac{1}{3}\times 1 + \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

である。

◀$Y=1$ のとき，サイコロ $\mathbf{z}$ の目は何でもよいので確率 1 である。

$Z<X$ となるのは，「$Z=2$」または「$Z=3$ かつ $X=5$」のときである。$Z=2$，$Z=3$，$X=5$ となる確率はそれぞれ $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$ である。二つの事象は互いに排反であるから

$$\boldsymbol{P(Z<X)} = \frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{6} = \frac{7}{18}$$

である。

◀$Z=2$ のとき，サイコロ $\mathbf{x}$ の目は何でもよいので確率 1 である。

$X=Z$ となる確率を $P(X=Z)$ で表すとすると，(1)より $P(X=Z)=\frac{5}{18}$ である。また，$X=Y$，$Y=Z$ となることはない。よって

$$P(Y<X) = 1-P(X<Y) = 1-\frac{5}{9} = \frac{4}{9} < P(X<Y)$$

$$P(Z<Y) = 1-P(Y<Z) = 1-\frac{5}{9} = \frac{4}{9} < P(Y<Z)$$

$$P(X<Z) = 1-P(Z<X)-P(X=Z)$$

$$= 1-\frac{7}{18}-\frac{5}{18} = \frac{6}{18} < P(Z<X)$$

となるから，サイコロ $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$，$\mathbf{z}$ の関係は

$$\mathbf{x} \ll \mathbf{y},\ \mathbf{y} \ll \mathbf{z},\ \mathbf{z} \ll \mathbf{x}$$ ⇨ ⓪，⓪，⓪

となる。

◀余事象の確率を用いる。

◀本問の考察によると，どのサイコロも大きい目が出やすいとは結論できないことになる。

(4)　三つのサイコロ $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$，$\mathbf{z}$ を袋の中に入れ，その袋の中から二つのサイコロを取り出したとき，サイコロ $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ および $\mathbf{x}$，$\mathbf{z}$ が取り出される確率はそれぞれ

$$\frac{1}{{}_3C_2} = \frac{1}{3}$$

である。サイコロ $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ が取り出されたとき，二つのサイコロを同時に投げて $\mathbf{x}$ の目が $\mathbf{y}$ の目よりも大きい確率は，(3)より $P(Y<X)=\frac{4}{9}$ である。また，サイコロ $\mathbf{x}$，$\mathbf{z}$ が取り出されたとき，二つのサイコロを同時に投げて $\mathbf{x}$ の目が $\mathbf{z}$ の目よりも大きい確率は，$P(Z<X)=\frac{7}{18}$ である。$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ が取り出される事象と $\mathbf{x}$，$\mathbf{z}$ が取り出される事象は互いに排反だから

◀二つのサイコロのすべての取り出し方は ${}_3C_2$ 通りである。

© 2026 Z-kai Inc.

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{x}} = \frac{1}{3}P(Y < X) + \frac{1}{3}P(Z < X)$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{7}{18}$$
$$= \frac{15}{54} = \boldsymbol{\frac{5}{18}}$$

である。同様に

$$p_{\mathrm{y}} = \frac{1}{3}P(X < Y) + \frac{1}{3}P(Z < Y)$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9}$$
$$= \frac{9}{27} = \frac{18}{54}$$

$$p_{\mathrm{z}} = \frac{1}{3}P(X < Z) + \frac{1}{3}P(Y < Z)$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{6}{18} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{9}$$
$$= \frac{16}{54}$$

である。よって，確率 p_{x}， p_{y}， p_{z} が満たす不等式は

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{x}} < \boldsymbol{p}_{\mathrm{z}} < \boldsymbol{p}_{\mathrm{y}}$$ ⇨ ①

である。

◀本問の考察によると，サイコロ **y** が最も大きい目が出やすいと解釈されることになる。つまり，(2)〜(4)を通じてわかったのは，どの観点に基づくかで，大きい目が出やすいのはどのサイコロなのかという解釈が変わることである。

ⓒ 2026 Z-kai Inc.