第1問

(1)　2次方程式 $x^2-4x+16=0$ の解は

$$\boldsymbol{x} = -(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 16} = 2 \pm \sqrt{-12}$$
$$= \boldsymbol{2 \pm 2\sqrt{3}\,i}$$

であり，二つの解は互いに共役な複素数であることがわかる。

p，q が実数であるとき，2次方程式

$$x^2 + px + q = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

の解は

$$\boldsymbol{x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2}} \qquad ⇨ ③$$

である。したがって，①の解の一つが虚数であるとき，もう一つの解も虚数であり，二つの解は互いに共役な複素数であることがわかる。

◀ a，b，c は実数，$a \neq 0$ のとき，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

とくに，$b=2b'$ のとき

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

◀ $p^2-4q<0$ のとき，①の解は

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{-(p^2-4q)}\,i}{2}$$

である。

(2)　$(2-i)^2+2i(2-i)$ を計算すると

$$(2-i)^2 + 2i(2-i) = 4 - 4i + i^2 + 4i - 2i^2$$
$$= 4 - i^2 = 4 - (-1) = \boldsymbol{5}$$

◀ $i^2=-1$

であるから，$z=2-i$ は

$$z^2 + 2iz - 5 = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

を満たしている。

②を変形すると

$$z^2 + 2iz + i^2 = 5 + i^2$$
$$(z+i)^2 = 5 - 1$$
$$\boldsymbol{(z+i)^2 = 4} \quad \cdots\cdots ③$$

となる。したがって

$$z + i = \pm 2$$

であるから，$z=2-i$ の他に

$$\boldsymbol{z = -2 - i}$$

も②を満たすことがわかる。

研究

太郎さんと花子さんの会話において，$z=2-i$ と共役な複素数 $\overline{z}=2+i$ が②の解にならないことは

$$(2+i)^2 + 2i(2+i) - 5 = 4 + 4i - 1 + 4i - 2 - 5$$
$$= -4 + 8i \neq 0$$

であることからわかる。

(3)　$$z^2 - (2+4i)z - 9 + 12i = 0 \quad \cdots\cdots ④$$

を変形すると

$$z^2 - 2(1+2i)z + (1+2i)^2 = 9 - 12i + (1+2i)^2$$
$$\{z-(1+2i)\}^2 = 9 - 12i + 1 + 4i - 4$$
$$\boldsymbol{(z - 1 - 2i)^2 = 6 - 8i} \quad \cdots\cdots ⑤$$

と表せる。$w=z-1-2i$ とおくと，⑤は

$$w^2 = 6 - 8i \quad \cdots\cdots ⑥$$

となる。

w を虚数とすると，実数 a，b $(b \neq 0)$ を用いて，$w=a+bi$ とおけて，w^2 は a，b を用いて

$$w^2 = (a+bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$$
$$= (a^2 - b^2) + 2abi \quad \cdots\cdots ⑦$$

⇨ ③，⑥

と表せる。⑥と⑦により

$$(a^2 - b^2) + 2abi = 6 - 8i$$

が成り立ち，$a^2 - b^2$，$2ab$ は実数であるから，実数 a，b についての連立方程式

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 6 & \cdots\cdots ⑧ \\ 2ab = -8 & \cdots\cdots ⑨ \end{cases}$$

◀複素数の相等。A，B，C，D が実数のとき
$A + Bi = C + Di$
$\Longleftrightarrow A = C$ かつ $B = D$

が得られる。$b \neq 0$ であるから，⑨より

$$a = -\frac{4}{b} \quad \cdots\cdots ⑩$$

であり，⑧に代入して

$$\left(-\frac{4}{b}\right)^2 - b^2 = 6$$
$$\frac{16}{b^2} - b^2 - 6 = 0$$

両辺に b^2 をかけて整理すると

$$b^4 + 6b^2 - 16 = 0$$
$$(b^2 - 2)(b^2 + 8) = 0$$

ここで，$b^2 + 8 > 0$ より

$$b^2 - 2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad b^2 = 2$$

よって

$$\boldsymbol{b = \pm\sqrt{2}}$$

であり，⑩より，複号同順で

$$a = -\frac{4}{\pm\sqrt{2}} = \mp 2\sqrt{2}$$

であるから

$$\boldsymbol{w = a + bi = \pm\left(2\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)}$$

が得られる。したがって，$z = w + 1 + 2i$ であるから

◀$w = z - 1 - 2i$ より。

$$z = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}i + 1 + 2i = 1 + 2\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})i$$

と

$$z = -(2\sqrt{2} - \sqrt{2}i) + 1 + 2i = 1 - 2\sqrt{2} + (2 + \sqrt{2})i$$

は④を満たすことがわかる。

第２問

(1)(i)　$p = 100$ のとき

$$\boldsymbol{\log_{10} p^2} = \log_{10} 100^2 = \log_{10}(10^2)^2 = \log_{10} 10^4$$
$$= \boldsymbol{4}$$

◀ $\log_a a^r = r$

$$\boldsymbol{\log_{10} \frac{p^3}{10}} = \log_{10} \frac{100^3}{10} = \log_{10} \frac{(10^2)^3}{10} = \log_{10} \frac{10^6}{10} = \log_{10} 10^5$$
$$= \boldsymbol{5}$$

である。

(ii)　正の数 M，N に対し

$$M < N \Longleftrightarrow \boldsymbol{\log_{10} M < \log_{10} N}$$

⇨ ⓪

◀$a > 1$ のとき
$M < N$
$\Longleftrightarrow \log_a M < \log_a N$
$0 < a < 1$ のとき
$M < N$
$\Longleftrightarrow \log_a M > \log_a N$

が成り立ち，さらに

$$M = N \Longleftrightarrow \log_{10} M = \log_{10} N$$

であることを考えると

$$M \leqq N \Longleftrightarrow \boldsymbol{\log_{10} M \leqq \log_{10} N}$$

⇨ ①

が成り立つ。よって，p^2，q は正の数であるから

$$p^2 \leqq q \Longleftrightarrow \log_{10} p^2 \leqq \log_{10} q$$

が成り立つ。$x=\log_{10} p$，$y=\log_{10} q$ とすると

$$\log_{10} p^2 = 2\log_{10} p = 2x$$

$$\log_{10}\frac{p^3}{10} = \log_{10} p^3 - \log_{10} 10 = 3\log_{10} p - 1 = 3x-1$$

であり，①が成り立つとき

$$\log_{10} p^2 \leqq \log_{10} q \leqq \log_{10}\frac{p^3}{10}$$

であるから，x，y は

$$\boldsymbol{2x \leqq y \leqq 3x-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$ ⇨ ①，③

を満たす。逆に，③が成り立つとき，p，q は①を満たす。

また，$\dfrac{10^6}{p^2q}$，$\dfrac{10^9}{p^2}$ は正の数であるから

$$\frac{10^6}{p^2q} \leqq q \leqq \frac{10^9}{p^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$\Longleftrightarrow \log_{10}\frac{10^6}{p^2q} \leqq \log_{10} q \leqq \log_{10}\frac{10^9}{p^2}$$

が成り立つ。$x=\log_{10} p$，$y=\log_{10} q$ とすると

$$\begin{aligned}\log_{10}\frac{10^6}{p^2q} &= \log_{10} 10^6 - \log_{10} p^2q \\ &= 6\log_{10} 10 - (\log_{10} p^2 + \log_{10} q) \\ &= 6-(2\log_{10} p + \log_{10} q) \\ &= 6-2x-y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10}\frac{10^9}{p^2} &= \log_{10} 10^9 - \log_{10} p^2 \\ &= 9-2\log_{10} p \\ &= 9-2x\end{aligned}$$

であり，②が成り立つとき，x，y は

$$6-2x-y \leqq y \leqq 9-2x$$

$$\boldsymbol{-x+3 \leqq y \leqq -2x+9} \quad \cdots\cdots\cdots ④$$ ⇨ ⓪，④

を満たす。逆に，④が成り立つとき，p，q は②を満たす。

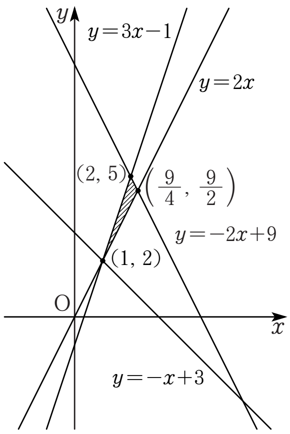
◀ $\log_a M^r = r\log_a M$

◀ $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

◀ $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

◀ $A \leqq B \leqq C$
$\Longleftrightarrow A \leqq B$ かつ $B \leqq C$

(2)　連立不等式③，④の表す領域を図示すると，次の図の斜線部分となるので，最も適当なものは ② である。ただし，境界線を含む。 ⇨ ②



(3)　$k=\dfrac{q}{p}$ とおくと

$$q=pk$$

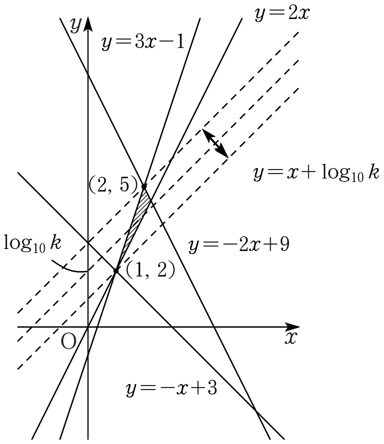
となる。ただし，$p>0$，$q>0$ より，$k>0$ である。

$x=\log_{10}p$，$y=\log_{10}q$ とするとき，y を k，x を用いて表すと

$$\boldsymbol{y}=\log_{10}q=\log_{10}pk=\log_{10}p+\log_{10}k$$
$$=\boldsymbol{x+\log_{10}k} \quad ⇨ ⑤$$

であり，$y=x+\log_{10}k$ は xy 平面上で傾き 1，y 切片 $\log_{10}k$ の直線を表す。

$y=x+\log_{10}k$ のグラフが連立不等式③，④の表す領域と共有点をもつときの $\log_{10}k$ の値の範囲を求める。



◀左の図のように傾き 1 の直線を平行移動させて，$\log_{10}k$ の値の範囲を捉える。

$\log_{10}k$ が最大となるのは，$y=x+\log_{10}k$ のグラフが点 $(2,\ 5)$ を通るときで

$$5=2+\log_{10}k$$
$$\log_{10}k=3$$

である。また，$\log_{10}k$ が最小となるのは，$y=x+\log_{10}k$ のグラフが点 $(1,\ 2)$ を通るときで

$$2=1+\log_{10}k$$
$$\log_{10}k=1$$

である。よって

$$1\leqq\log_{10}k\leqq3$$
$$\log_{10}10\leqq\log_{10}k\leqq\log_{10}10^3$$

であり，底 10 は 1 より大きいから

$$\boldsymbol{10\leqq k\leqq1000} \quad ⇨ ⑤，⑦$$

である。したがって，p，q が連立不等式①，②を満たすとき，$\dfrac{q}{p}$ のとり得る値の範囲は

$$10\leqq\frac{q}{p}\leqq1000$$

である。

第３問

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2x+1$ とすると

$$\boldsymbol{f'(x)=x^2-3x+2}=(x-1)(x-2) \quad ⇨ ③$$

であるから，$f(x)$ の増減は次の表のようになる。

x		1		2	
$f'(x)$	＋	0	−	0	＋
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$f(x)$ は $\boldsymbol{x=1}$ で極大値をとり，$\boldsymbol{x=2}$ で極小値をとる。

また，$y=f(x)$ のグラフ上の点 $(0,\ f(0))$ における接線の方程式は

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)$$

である。

◀$y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$$f(0)=1,\quad f'(0)=2$$

より，この接線の方程式を $y=g(x)$ とおくと

$$\boldsymbol{g(x)=2x+1}$$

であり，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は

$$\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1=2x+1$$

$$\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2=0$$

$$\frac{1}{3}x^2\left(x-\frac{9}{2}\right)=0$$

$$x=0,\ \frac{9}{2}$$

よって，点 $(0,\ f(0))$ 以外の共有点の x 座標は $\boldsymbol{\frac{9}{2}}$ である。

$h(x)=g(x)-f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}h(x)&=2x+1-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1\right)\\&=-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\end{aligned}$$

であり

$$h'(x)=-x^2+3x=-x(x-3)$$

であるから，$h(x)$ の $x\geqq0$ の範囲における増減は次の表のようになる。

x	0		3	
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$h(x)$ は $\boldsymbol{x=3}$ で極大値かつ最大値をとる。

$\alpha=3$ のとき，$y=f(x)$ のグラフ上の点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線の傾きは

$$f'(\alpha)=f'(3)=3^2-3\cdot3+2=2$$

◀ $f'(x)=x^2-3x+2$

である。この値は直線 $y=g(x)$ の傾きと等しいので，$y=f(x)$ のグラフ上の点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線は，直線 $y=g(x)$ に **平行である**。 ⇨ 0

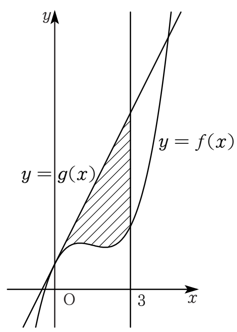
さらに，$h(x)$ の増減表より，$0\leqq x\leqq3$ の範囲で

$$h(x)=g(x)-f(x)\geqq0$$

であるから，$0\leqq x\leqq3$ の範囲で，関数 $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフおよび直線 $x=3$ で囲まれた図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}&=\int_0^3\{g(x)-f(x)\}\,dx\\&=\int_0^3\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right)dx\\&=\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{2}x^3\right]_0^3\\&=-\frac{3^3}{4}+\frac{3^3}{2}=\boldsymbol{\frac{27}{4}}\end{aligned}$$

◀



である。

(2)(i)　$f(x)$ は x^3 の係数が 1 の 3 次関数，$g(x)$ は 1 次関数であるから，$h(x)=g(x)-f(x)$ は x^3 の係数が -1 の 3 次関数である。したがって，$h'(x)$ は x^2 の係数が $\boldsymbol{-3}$ の 2 次関数である。

◀ $(-x^3)'=-3x^2$

また，直線 $y=g(x)$ は関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(0,\ f(0))$ における接線なので，$x=0$ 以外の共有点の x 座標を $\beta\,(>0)$ とすると

$$h(x)=g(x)-f(x)$$
$$=-x^2(x-\beta)=-x^3+\beta x^2$$

と表せる。よって

$$h'(x)=-3x^2+2\beta x=-3x\left(x-\frac{2}{3}\beta\right)$$

であるから，$h(x)$ の $x\geqq 0$ の範囲における増減は次の表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\beta$	$\cdots$
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	0	↗	極大	↘

したがって，$h(x)$ は $x=\frac{2}{3}\beta$ で極大値かつ最大値をとるから

$$\alpha=\frac{2}{3}\beta$$

であり

$$\boldsymbol{x=0,\ \alpha}$$ ⇨ ③

で $h'(x)=0$ を満たす。よって

$$h'(x)=-3x(x-\alpha)$$

である。また

$$\int_0^x h'(t)\,dt=\Big[\,h(t)\,\Big]_0^x=h(x)-h(0)$$

と $h(0)=0$ から

$$\boldsymbol{h(x)=\int_0^x h'(t)\,dt}$$ ⇨ ①，⓪

◀$f(x)$ の不定積分の一つを $F(x)$ とすると
$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[\,F(x)\,\Big]_a^b$
$=F(b)-F(a)$

であり，よって

$$\boldsymbol{h(x)}=\int_0^x\{-3t(t-\alpha)\}\,dt=\int_0^x(-3t^2+3\alpha t)\,dt$$
$$=\Big[-t^3+\frac{3}{2}\alpha t^2\Big]_0^x$$
$$=\boldsymbol{-x^3+\frac{3}{2}\alpha x^2}$$ ⇨ ⑤

である。$0\leqq x\leqq\alpha$ において

$$h(x)=g(x)-f(x)\geqq 0$$

であるから，$0\leqq x\leqq\alpha$ の範囲で，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=g(x)$ のグラフおよび直線 $x=\alpha$ で囲まれた図形の面積 S は

$$\boldsymbol{S}=\int_0^\alpha\{g(x)-f(x)\}\,dx=\int_0^\alpha\left(-x^3+\frac{3}{2}\alpha x^2\right)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}\alpha x^3\Big]_0^\alpha$$
$$=-\frac{\alpha^4}{4}+\frac{\alpha^4}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{4}\alpha^4}$$ ⇨ ④

(ii)　$f(x)$ は x^3 の係数が 1 の 3 次関数，$g(x)$ は 2 次関数であるから，$h(x)=g(x)-f(x)$ は x^3 の係数が -1 の 3 次関数である。したがって，$h'(x)$ は x^2 の係数が -3 の 2 次関数である。

◀(i)と同様に考える。

また，関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(0,\ f(0))$ における接線と $y=g(x)$ のグラフ上の点 $(0,\ g(0))$ における接線は一致し，$x=0$ 以外の共有点の x 座標を $\gamma\,(>0)$ とすると

$$h(x)=g(x)-f(x)$$

$$= -x^2(x-\gamma) = -x^3 + \gamma x^2$$

と表せる。よって，(i)と同様にして

$$h(x) = -x^3 + \frac{3}{2}\alpha x^2$$

となるから，$0 \leqq x \leqq \alpha$ の範囲で，$y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフおよび直線 $x = \alpha$ で囲まれた図形の面積 S は

$$\boldsymbol{S} = \int_0^{\alpha} \{g(x) - f(x)\}\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{4}\alpha^4} \qquad ⇨ ⑤$$

である。

◀「研究」参照。$g(x)$ が 2 次関数になっても，$h(x)$ は (i) の $g(x)$ が 1 次関数のときと同様の形で表せる。

研究

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$，曲線 $y = g(x)$ 上の点 $(t,\ g(t))$ における接線が一致する（このとき，2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ は $x = t$ で接するという）ための条件は

$$f(t) = g(t) \quad \text{かつ} \quad f'(t) = g'(t)$$

である。このとき，$h(x) = g(x) - f(x)$ とおくと

$$h(t) = g(t) - f(t) = 0 \quad \text{かつ} \quad h'(t) = g'(t) - f'(t) = 0$$

であるから，$h(x)$ は $(x-t)^2$ を因数にもつ。すなわち，$h(x) = 0$ は $x = t$ を重解にもつ。

第４問

(1)(i)　①より

$$\boldsymbol{a_3} = 3a_2 - a_1 = 3\cdot 2 - 1 = \boldsymbol{5}$$

$$\boldsymbol{a_4} = 3a_3 - a_2 = 3\cdot 5 - 2 = \boldsymbol{13}$$

である。

(ii)　証明の [II] では，$n = k$ のとき②，すなわち

Ⓒ　$a_k a_{k+2} - (a_{k+1})^2 = 1$

が成り立つならば，$n = k+1$ のときにも②，すなわち

Ⓓ　$a_{k+1} a_{k+3} - (a_{k+2})^2 = 1$

が成り立つことを示している。

この証明の過程で

Ⓑ　$a_{k+3} = 3a_{k+2} - a_{k+1}$

と

$3a_{k+1} - a_{k+2} = a_k$　すなわち　Ⓐ　$a_{k+2} = 3a_{k+1} - a_k$

が成り立つことを用いている。

したがって，最も適当なものは⓪である。　⇨ ⓪

(2)　自然数 k について

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b_{k+1}b_{k+3} - (b_{k+2})^2} &= \boldsymbol{b_{k+1}(6b_{k+2} - 5b_{k+1}) - (b_{k+2})^2} \\ &= (6b_{k+1} - b_{k+2})b_{k+2} - 5(b_{k+1})^2 \\ &= 5b_k b_{k+2} - 5(b_{k+1})^2 \\ &= \boldsymbol{5\{b_k b_{k+2} - (b_{k+1})^2\}}\end{aligned}$$

◀ $b_{k+3} = 6b_{k+2} - 5b_{k+1}$

◀ $b_{k+2} = 6b_{k+1} - 5b_k$ より $6b_{k+1} - b_{k+2} = 5b_k$

が成り立つ。

したがって，すべての自然数 n について

$$b_{n+1}b_{n+3} - (b_{n+2})^2 = 5\{b_n b_{n+2} - (b_{n+1})^2\}$$

であるから，数列 $\{b_n b_{n+2} - (b_{n+1})^2\}$ は

初項 $b_1 b_3 - (b_2)^2$，公比 5 の等比数列

であることがわかる。ここで

$$b_3 = 6b_2 - 5b_1 = 6 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 7$$

より

$$b_1 b_3 - (b_2)^2 = 1 \cdot 7 - 2^2 = 3$$

であるから，すべての自然数 n について

$$\boldsymbol{b_n b_{n+2} - (b_{n+1})^2 = 3 \cdot 5^{n-1}}$$

が成り立つ。

(3)　(1)，(2)と同様に考えると，すべての自然数 n について

$$\begin{aligned} c_{n+1}c_{n+3} - (c_{n+2})^2 &= c_{n+1}(pc_{n+2} + qc_{n+1}) - (c_{n+2})^2 \\ &= (pc_{n+1} - c_{n+2})c_{n+2} + q(c_{n+1})^2 \\ &= -qc_n c_{n+2} + q(c_{n+1})^2 \\ &= -q\{c_n c_{n+2} - (c_{n+1})^2\} \end{aligned}$$

が成り立つ。$d_n = c_n c_{n+2} - (c_{n+1})^2$ より

$$d_{n+1} = -qd_n$$

が成り立つ。$d_1 \fallingdotseq 0$ とすると，$\{d_n\}$ は**等比数列**であり，その**公比**は $\boldsymbol{-q}$ $(\fallingdotseq 0)$ であることがわかる。　⇨ ①，①，③

◀(1)，(2)の式変形の過程を振り返れば，(1)の a_n の係数 -1 と公比 1，(2)の b_n の係数 -5 と公比 5 の関係から，c_n の係数 q と公比 $-q$ の関係が見えてくる。

　また

$$d_n = d_1 \cdot (-q)^{n-1}$$

であるから，d_n が n によらない一定の値であるのは，公比 $-q$ が **1** のときである。

　以上により，$c_n c_{n+2} - (c_{n+1})^2$ が n によらない一定の値であるのは

◀　$d_n = c_n c_{n+2} - (c_{n+1})^2$

$$-q = 1$$

が成り立つときである。

第５問

(1)　製作工程が正常に作動しているときは，X は正規分布 $N(400, 4)$ に従う。このとき

$$\boldsymbol{Z = \frac{X - 400}{2}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。ここで

◀確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき，確率変数 $Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$$\begin{aligned} P(396 \leqq X \leqq 404) &= P\left(\frac{396-400}{2} \leqq Z \leqq \frac{404-400}{2}\right) \\ &= P(-2 \leqq Z \leqq 2) \\ &= P(-2 \leqq Z \leqq 0) + P(0 \leqq Z \leqq 2) \\ &= 2P(0 \leqq Z \leqq 2) \\ &= 2 \times 0.4772 = 0.9544 \end{aligned}$$

◀標準正規分布の分布曲線は y 軸に関して対称であることより。

◀$P(0 \leqq Z \leqq 2)$ は，正規分布表において，2.0 の行と 0.00 の列が交わったところの値である。

である。したがって，その場合の不良品率の値 p_0 は

$$p_0 = 1 - P(396 \leqq X \leqq 404) = 1 - 0.9544 = 0.0456$$

であるから，p_0 の値はおよそ **0.046** である。　⇨ ①

　一方，製作工程が正常に作動しておらず，X が正規分布 $N(401, 4)$ に従うとすると

$$Z_1 = \frac{X - 401}{2}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。ここで

$$P(396 \leqq X \leqq 404) = P\left(\frac{396-401}{2} \leqq Z_1 \leqq \frac{404-401}{2}\right)$$

$= P(-2.5 \leqq Z_1 \leqq 1.5)$
$= P(-2.5 \leqq Z_1 \leqq 0) + P(0 \leqq Z_1 \leqq 1.5)$
$= P(0 \leqq Z_1 \leqq 2.5) + P(0 \leqq Z_1 \leqq 1.5)$
$= 0.4938 + 0.4332 = 0.9270$

である。したがって，その場合の不良品率の値 p_1 は

$$p_1 = 1 - P(396 \leqq X \leqq 404) = 1 - 0.9270 = 0.0730$$

であるから，**p_1 は p_0 より大きい。** ⇨ ①

(2)(i)　$W = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{225}$ は 225 回の試行のうち不良品を取り出す回数を表す確率変数であり，W は二項分布 $\boldsymbol{B(225,\ p)}$ に従う。 ⇨ ②

標本の大きさ 225 は十分に大きいので，W は近似的に平均が

$\boldsymbol{225p}$ ⇨ ②

標準偏差が

$\sqrt{225p(1-p)} = \boldsymbol{15\sqrt{p(1-p)}}$ ⇨ ③

の正規分布に従う。

(ii)　不良品率 p が(1)で求めた p_0 より大きいといえるかについて，有意水準 5% で仮説検定を行うので，帰無仮説は「$p = p_0$」，対立仮説は「$\boldsymbol{p > p_0}$」である。 ⇨ ④

そこで，不良品率が p_0 より大きければ帰無仮説が棄却されるように，棄却域を片側にとる片側検定で考える。このとき，帰無仮説「$p = p_0$」のもとで

$$P(W > c) = 0.05$$

となるように c の値を求めればよい。(i)から W の分布は正規分布で近似できるので，平均 $225p$，標準偏差 $15\sqrt{p(1-p)}$ の p に p_0 を代入したものを

$$a = 225p_0,\quad b = 15\sqrt{p_0(1-p_0)}$$

とすると

$$Z_2 = \frac{W-a}{b}$$

は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。したがって

$$P(W > c) = P\left(Z_2 > \frac{c-a}{b}\right) = 0.05$$

となるように c の値を求めればよい。このとき

$$P\left(Z_2 > \frac{c-a}{b}\right) = P(Z_2 \geqq 0) - P\left(0 \leqq Z_2 \leqq \frac{c-a}{b}\right)$$

より

$$0.5 - P\left(0 \leqq Z_2 \leqq \frac{c-a}{b}\right) = 0.05$$

すなわち

$$P\left(0 \leqq Z_2 \leqq \frac{c-a}{b}\right) = 0.45$$

となるような $\dfrac{c-a}{b}$ の値を正規分布表で探す。正規分布表より

$$P(0 \leqq Z_2 \leqq 1.64) = 0.4495$$

であるから

$$\frac{c-a}{b} = 1.64$$

したがって

$\boldsymbol{c = a + 1.64 \times b}$ ⇨ ①

である。

研究

(1)より，$p_0 = 0.046$ とすると

◀1 回の試行で事象 A の起こる確率が p のとき，この試行を n 回行う反復試行において A の起こる回数を X とすると，確率変数 X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。

◀確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとすると，n が十分に大きいとき，X は近似的に正規分布 $N(np,\ np(1-p))$ に従う。

◀対立仮説は統計的に検証したい仮説である。

◀棄却域を片側にとる検定を片側検定，棄却域を両側にとる仮説検定を両側検定という。

◀0.45 ぴったりの値はないので，0.45 にいちばん近い値 0.4495 に注目する。

$$a=225p_0=225\times0.046=10.35$$
$$b=15\sqrt{p_0(1-p_0)}=15\sqrt{0.046\times(1-0.046)}\fallingdotseq3.14$$
$$c=a+1.64\times b\fallingdotseq10.35+1.64\times3.14=15.4996$$

したがって，棄却域は

$$W>15.4996$$

となるから，この方法に従えば，1 日に製作される円板の不良品の枚数が 16 以上であるときに製作工程を点検することになる。

◀W は自然数。

(3) 母平均 m の値が 400 でないといえるかについて，有意水準 5% で仮説検定を行うので，帰無仮説は「$m=400$」，対立仮説は「$m\neq400$」である。

そこで，$\overline{X}$ が 400 より小さすぎても大きすぎても帰無仮説が棄却されるように，棄却域を両側にとる両側検定で考える。帰無仮説「$m=400$」が正しいとき

$$P(\overline{X}<c_1)=0.025,\ P(\overline{X}>c_2)=0.025$$

となるように c_1，c_2 の値を選ぶ。

平均 400，標準偏差 2 の正規分布をもつ母集団から大きさ 225 の無作為標本を抽出するとき，標本平均 $\overline{X}=\dfrac{1}{225}(X_1+X_2+\cdots+X_{225})$ は正規分布 $N\left(400,\ \dfrac{4}{225}\right)$ に従うので

◀母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出する。n が十分に大きいとき，標本平均 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。とくに，母集団が正規分布のとき，$\overline{X}$ は正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

$$Z_3=\frac{\overline{X}-400}{\frac{2}{15}}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。したがって

$$P(\overline{X}<c_1)=P\left(Z_3<\frac{c_1-400}{\frac{2}{15}}\right)=0.025$$
$$P(\overline{X}>c_2)=P\left(Z_3>\frac{c_2-400}{\frac{2}{15}}\right)=0.025$$

となるように c_1, c_2 の値を選べばよい。このとき

$$P\left(Z_3>\frac{c_2-400}{\frac{2}{15}}\right)=P(Z_3\geqq0)-P\left(0\leqq Z_3\leqq\frac{c_2-400}{\frac{2}{15}}\right)$$

より

$$0.5-P\left(0\leqq Z_3\leqq\frac{c_2-400}{\frac{2}{15}}\right)=0.025$$

すなわち

$$P\left(0\leqq Z_3\leqq\frac{c_2-400}{\frac{2}{15}}\right)=0.475$$

となるような $\dfrac{c_2-400}{\frac{2}{15}}$ の値を正規分布表で探す。正規分布表より

$$P(0\leqq Z_3\leqq1.96)=0.4750$$

であるから

$$\frac{c_1-400}{\frac{2}{15}}=-1.96,\quad \frac{c_2-400}{\frac{2}{15}}=1.96$$

したがって

$$\boldsymbol{c_1 = 400 - 1.96 \times \frac{2}{15}}, \quad c_2 = 400 + 1.96 \times \frac{2}{15} \qquad ⇨ ③, ④$$

となる。

研究

c_1，c_2 の値は

$$c_1 \fallingdotseq 400 - 0.26 = 399.74$$

$$c_2 \fallingdotseq 400 + 0.26 = 400.26$$

であり，両側検定で有意水準 5% の棄却域は

$$\overline{X} < 399.74 \quad \text{または} \quad 400.26 < \overline{X}$$

となる。この方法に従えば，1 日に製作される円板の直径の平均値を t とすると

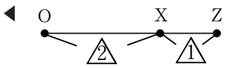
$$t < 399.74 \quad \text{または} \quad 400.26 < t$$

であるときに製作工程を点検することになる。

第６問

(1)(i)　条件㋐から

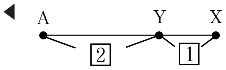
$$\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{2}{2+1}\overrightarrow{\mathrm{OZ}} = \frac{2}{3}\vec{z} \quad \cdots\cdots ①$$



である。

条件㋑から

$$\overrightarrow{\mathrm{XA}} = (2+1)\overrightarrow{\mathrm{XY}} = 3\overrightarrow{\mathrm{XY}}$$

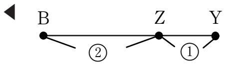


であるから

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}} = \overrightarrow{\mathbf{OX}} + \overrightarrow{\mathbf{XA}} = \overrightarrow{\mathbf{OX}} + \mathbf{3}\overrightarrow{\mathbf{XY}}$$

条件㋒から

$$\overrightarrow{\mathrm{ZB}} = -2\overrightarrow{\mathrm{ZY}}$$



であるから

$$\overrightarrow{\mathbf{OB}} = \overrightarrow{\mathbf{OZ}} + \overrightarrow{\mathbf{ZB}} = \overrightarrow{\mathbf{OZ}} - \mathbf{2}\overrightarrow{\mathbf{ZY}}$$

である。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OX}} + 3\overrightarrow{\mathrm{XY}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OX}} + 3\left(\overrightarrow{\mathrm{OY}} - \overrightarrow{\mathrm{OX}}\right) = -2\overrightarrow{\mathrm{OX}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OY}}$$

であり，$\vec{a}$，$\vec{x}$，$\vec{y}$ を用いて表すと

$$\boldsymbol{-2\vec{x} + 3\vec{y} = \vec{a}} \quad \cdots\cdots ②$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OZ}} - 2\overrightarrow{\mathrm{ZY}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OZ}} - 2\left(\overrightarrow{\mathrm{OY}} - \overrightarrow{\mathrm{OZ}}\right) = -2\overrightarrow{\mathrm{OY}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$$

であり，$\vec{b}$，$\vec{y}$，$\vec{z}$ を用いて表すと

$$\boldsymbol{-2\vec{y} + 3\vec{z} = \vec{b}} \quad \cdots\cdots ③$$

となる。

(ii)　①，②から

$$-2 \cdot \frac{2}{3}\vec{z} + 3\vec{y} = \vec{a}$$

$$\boldsymbol{3\vec{y} - \frac{4}{3}\vec{z} = \vec{a}} \quad \cdots\cdots ④$$

となる。③×4，④×9 から

$$\begin{cases} -8\vec{y} + 12\vec{z} = 4\vec{b} \\ 27\vec{y} - 12\vec{z} = 9\vec{a} \end{cases}$$

辺々を加えて

$$19\vec{y} = 9\vec{a} + 4\vec{b}$$

$$\vec{y} = \frac{1}{19}\left(9\vec{a} + 4\vec{b}\right)$$

また，③×9，④×6 から

$$\begin{cases} -18\vec{y} + 27\vec{z} = 9\vec{b} \\ 18\vec{y} - 8\vec{z} = 6\vec{a} \end{cases}$$

辺々を加えて

$$19\vec{z} = 6\vec{a} + 9\vec{b}$$

$$\vec{z} = \frac{1}{19}\left(6\vec{a} + 9\vec{b}\right)$$

を得る。さらに①から

$$\vec{x} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{19}\left(6\vec{a} + 9\vec{b}\right) = \frac{1}{19}\left(4\vec{a} + 6\vec{b}\right)$$

となる。

(2)(i)　(1)(ii)から

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = \vec{y} - \vec{x}$$

$$= \frac{1}{19}\left(9\vec{a} + 4\vec{b}\right) - \frac{1}{19}\left(4\vec{a} + 6\vec{b}\right) = \frac{1}{19}\left(5\vec{a} - 2\vec{b}\right)$$

$$\overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OX} = \vec{z} - \vec{x}$$

$$= \frac{1}{19}\left(6\vec{a} + 9\vec{b}\right) - \frac{1}{19}\left(4\vec{a} + 6\vec{b}\right) = \frac{1}{19}\left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right)$$

である。したがって，$\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{XZ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{XZ} = \frac{1}{19^2}\left(5\vec{a} - 2\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right)$$

$$= \frac{1}{19^2}\left(10|\vec{a}|^2 + 11\vec{a}\cdot\vec{b} - 6|\vec{b}|^2\right)$$

$$= \frac{1}{19^2}\left(10 + 11\vec{a}\cdot\vec{b} - 6|\vec{b}|^2\right) \quad \cdots\cdots ⑤$$

◀ $|\vec{a}| = 1$

となる。

(ii)　$\angle AOB = 90^\circ$ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

であるから，⑤より

$$\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{XZ} = \frac{1}{19^2}\left(10 - 6|\vec{b}|^2\right)$$

ここで，$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ より

$$\overrightarrow{XY} = \frac{1}{19}\left(5\vec{a} - 2\vec{b}\right) \neq \vec{0}, \quad \overrightarrow{XZ} = \frac{1}{19}\left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right) \neq \vec{0}$$

であり，△XYZ が $\angle X = 90^\circ$ である直角三角形となるのは

$$\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{XZ} = 0$$

のときである。すなわち

$$10 - 6|\vec{b}|^2 = 0$$

$$|\vec{b}|^2 = \frac{5}{3}$$

$|\vec{b}| > 0$ より

$$|\vec{b}| = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

のときである。

(iii)　$\angle AOB = 100^\circ$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot|\vec{b}|\cos 100^\circ = |\vec{b}|\cos 100^\circ$$

◀ $|\vec{a}| = 1$

であり，⑤より

$$\overrightarrow{\mathrm{XY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=\frac{1}{19^2}\left(10+11|\vec{b}|\cos 100^\circ-6|\vec{b}|^2\right)$$

である。

$\overrightarrow{\mathrm{XY}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{XZ}}\neq\vec{0}$ より，$\triangle\mathrm{XYZ}$ が $\angle\mathrm{X}=90^\circ$ である直角三角形となるのは

$$10+11|\vec{b}|\cos 100^\circ-6|\vec{b}|^2=0$$

$$6|\vec{b}|^2-(11\cos 100^\circ)|\vec{b}|-10=0$$

のときである。

$|\vec{b}|=t\ (>0)$ とし

$$f(t)=6t^2-(11\cos 100^\circ)t-10$$

$$k=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

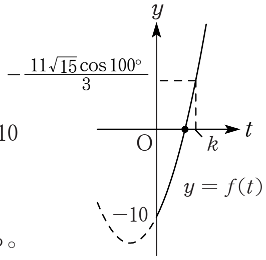
とすると

$$f(0)=-10<0$$

$$f(k)=6\cdot\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2-(11\cos 100^\circ)\cdot\frac{\sqrt{15}}{3}-10$$

$$=-\frac{11\sqrt{15}\cos 100^\circ}{3}>0$$

◀$90^\circ<\theta<180^\circ$ のとき $\cos\theta<0$



であるから，放物線 $y=f(t)$ は右の図のようになる。

よって，$t>0$ の範囲で考えると，$f(t)=0$ を満たす t は

$$0<t<k$$

の範囲にちょうど一つある。すなわち，$\triangle\mathrm{XYZ}$ が $\angle\mathrm{X}=90^\circ$ である直角三角形となるような $|\vec{b}|$ の値は**ちょうど一つあり，k より小さい。** ⇨ ⓪

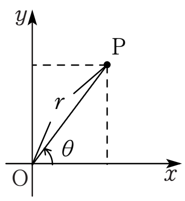
第７問

(1)　x，y を r，θ を用いて表すと

$$\boldsymbol{x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta}\ \cdots\cdots①$$

⇨ ⑤，④

である。



(2)(i)　$r=2|\cos\theta|$ ……②

$\theta=\frac{\pi}{6}$ のとき

$$\boldsymbol{r}=2\left|\cos\frac{\pi}{6}\right|=2\cdot\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$ ⇨ ⑧

である。極座標が $\left(\sqrt{3},\ \frac{\pi}{6}\right)$ である点の直交座標は，①を用いると

$$x=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$$

$$y=\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

より，$\left(\boldsymbol{\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$ である。 ⇨ ⑦，④

(ii)　$r\geqq 0$，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

・$\cos\theta\geqq 0$ を満たす θ の値の範囲は $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi\leqq\theta<2\pi$ である。このとき，②は

$$r=2\cos\theta\ \cdots\cdots③$$

である。③の両辺に r を掛けると

$$r^2 = 2r\cos\theta$$

となり，①より

$$x^2+y^2=(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2$$

を用いると，x，y の方程式

$$x^2+y^2=2x$$

$$x^2-2x+1+y^2=1$$

$$\boldsymbol{(x-1)^2+y^2=1} \qquad ⇨ ⑥$$

が得られる。

・$\cos\theta<0$ を満たす θ の値の範囲は $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ である。このとき，②は

$$r=-2\cos\theta \quad \cdots\cdots ④$$

である。④の両辺に r を掛けると

$$r^2=-2r\cos\theta$$

となり，①を用いると，x，y の方程式

$$x^2+y^2=-2x$$

$$x^2+2x+1+y^2=1$$

$$(x+1)^2+y^2=1$$

が得られる。

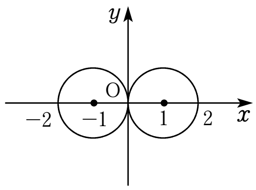
以上より

$x\geqq 0$ のとき，$(x-1)^2+y^2=1$

$x<0$ のとき，$(x+1)^2+y^2=1$

であるから，図形 C は右の図のようになり，

③ であることがわかる。 ⇨ ③



(3)(i)　$0\leqq\theta<2\pi$ より

$$-1\leqq\cos\theta\leqq 1 \quad すなわち \quad 0\leqq|\cos\theta|\leqq 1$$

であるから

$$r=1+2|\cos\theta| \quad \cdots\cdots ⑤$$

の最大値は

$$1+2\cdot 1=\mathbf{3}$$

であり，このときの θ の値は，$|\cos\theta|=1$ より

$$\boldsymbol{0,\ \pi} \qquad ⇨ ⓪,\ ③$$

である。また，r の最小値は

$$1+2\cdot 0=\mathbf{1}$$

であり，このときの θ の値は，$|\cos\theta|=0$ より

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi} \qquad ⇨ ②,\ ⑤$$

である。

$1<r<3$ のとき，⑤より

$$0<|\cos\theta|<1$$

であり，$0<k<1$ を満たす k に対して

$$|\cos\theta|=k \quad すなわち \quad \cos\theta=\pm k$$

を満たす θ の値は 4 個ある。すなわち，⑤を満たす θ の値の個数は，r の値によらず，つねに **4** 個である。

◀$0<k<1$ のとき
$\cos\theta=k$
を満たす θ の値は 2 個あり
$\cos\theta=-k$
を満たす θ の値も 2 個ある。

(ii)　図形 C 上に点 P をとる。

まず，P が原点でない場合に，原点 O を端点とする半直線 OP と図形 D の

共有点を Q とすると，②，⑤から，線分 OQ の長さは線分 OP の長さに 1 を加えたものになる。例えば，P の極座標が $(2, 0)$ のとき

◀直交座標も $(2,\ 0)$ である。

Q の極座標　$(3, 0)$

Q の直交座標　$(3, 0)$

であり，P の極座標が $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ のとき

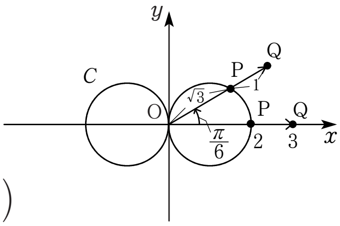
◀(2)(i)の点に注目する。直交座標は $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。

Q の極座標　$\left(\sqrt{3}+1,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$

Q の直交座標　$\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$

◀ $x=(\sqrt{3}+1)\cos\dfrac{\pi}{6}$

$y=(\sqrt{3}+1)\sin\dfrac{\pi}{6}$



である。

次に，P が原点の場合は

$r=0$

であるから，②を満たす $\theta\,(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の値は

$2|\cos\theta|=0$　すなわち　$\cos\theta=0$

◀ $r=2|\cos\theta|$

より

$\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

である。したがって，②を満たす P の極座標は

$\boldsymbol{\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right),\ \left(0,\ \dfrac{3}{2}\pi\right)}$　⇨ ②，⑤

である。

$\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$ のとき

$\cos\theta=0$

であるから，⑤を満たすのは

$\boldsymbol{r}=1+2\cdot 0=\mathbf{1}$

◀ $r=1+2|\cos\theta|$

のときである。よって，P が原点の場合

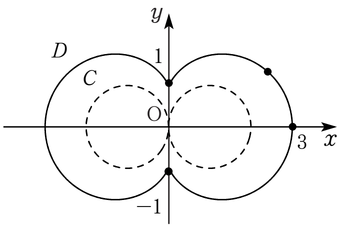
Q の極座標　$\left(1,\ \dfrac{\pi}{2}\right),\ \left(1,\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$

Q の直交座標　$(0,\ 1),\ (0,\ -1)$

◀ $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

である。

以上のことから，図形 D は ⑤ であることがわかる。　⇨ ⑤



◀⓪〜⑨ のうち，xy 平面上で，4 点 $(3, 0)$，$(0, \pm 1)$，$\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ を通るのは ⑤ だけである。