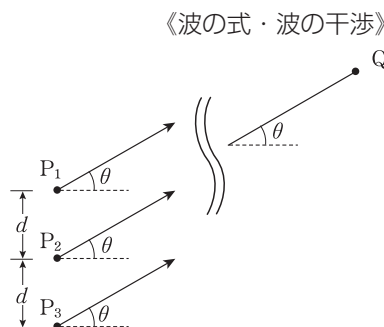


2 問題

一様な媒質中において、図のように、同一直線上に、3つの点波源 P_1 , P_2 , P_3 が、この順に間隔 d で並んでいる。これらは、同じ振動数、振幅、位相で振動するものとし、このとき発する波の波長を λ とする。ここでは、3つの点波源が並ぶ直線に垂直な直線に対し、反時計回りを正として角度 θ をなす方向の点 Q において、以下の問1、問2の状況における合成波を観測する場合について考える。ただし、点 Q は $P_1 \sim P_3$ から十分に遠方にあるため、各波源から点 Q に達する波は平面波と考えてよく、

$P_1 \sim P_3$ から点 Q に達する波は平行で振幅が等しいとみなせるものとする。そこで、これらの振幅を $A (>0)$ 、角振動数を $\omega (>0)$ とすると、 P_2 からの波による点 Q での変位は、時刻 t の関数として、 $A \sin \omega t$ と表されるものとする。このとき、 P_2 からの波に対する位相差を δ とすると、 P_1 からの波による点 Q での変位は $A \sin(\omega t + \delta)$ 、 P_3 からの波による点 Q での変位は $A \sin(\omega t - \delta)$ と表されるものとする。以下では、波の強さは振幅の2乗に比例することを用いてよい。また、必要ならば、三角関数に関する次の公式を用いてよい。(25点)



$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

問1 まず、 P_1 を停止し、 P_2 , P_3 だけを振動させる場合について考える。

- (1) δ を、 d , θ , および λ を用いて表せ。(3点)
- (2) 点 Q で観測される合成波の振幅 $B (>0)$ を、 A , δ を用いて表せ。(3点)
- (3) $d > 2\lambda$ の場合について、 $0 \leq \delta \leq 4\pi$ における B^2 と δ の関係を表すグラフの概形を、縦軸に B^2 、横軸に δ をとって描け。ただし、主要値も記入すること。(3点)
- (4) 点 Q で観測される合成波の強さが最大になるときについて、 $\sin \theta$ が満たすべき条件を、 d , λ , および整数 $n (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ を用いて表せ。(3点)

問2 次に、 P_1 , P_2 , P_3 をすべて振動させる場合について考える。

- (1) 点 Q で観測される合成波の振幅 $C (>0)$ を、 A , δ を用いて表せ。(4点)
- (2) 点 Q で観測される合成波の振幅 C が最大になるときの δ の値を、整数 $n (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ を用いて表せ。(4点)
- (3) 問2(2)の結果を踏まえ、点 Q で観測される合成波の強さが最大になるときについて、

$\sin \theta$ が満たすべき条件を, d , λ , および整数 $n (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ を用いて表せ。

(5点)

ポイント

経路差を位相差に変換し, 三角関数の公式を用いて波の重ね合わせを表現する。

解答

問1 (1) $\delta = 2\pi \cdot \frac{d \sin \theta}{\lambda}$ (2) $B = 2A \left| \cos \frac{\delta}{2} \right|$ (3) 「解説」参照 (4) $\sin \theta = \frac{n\lambda}{d}$

問2 (1) $C = A |1 + 2 \cos \delta|$ (2) $\delta = 2n\pi$ (3) $\sin \theta = \frac{n\lambda}{d}$

解説

問1 (1) 隣り合う波源から出て点Qに達する波の経路差は $d \sin \theta$ であるから

$$\delta = 2\pi \cdot \frac{d \sin \theta}{\lambda} \quad (\text{答}) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

(2) P_2 , P_3 からの波の合成波の点Qでの変位は

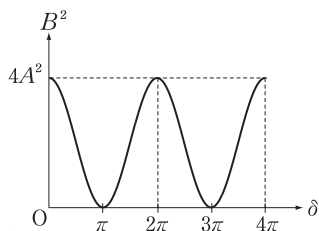
$$A \sin \omega t + A \sin(\omega t - \delta) = 2A \cos \frac{\delta}{2} \sin \left(\omega t - \frac{\delta}{2} \right)$$

$B > 0$ であるから, 合成振幅 B は

$$B = 2A \left| \cos \frac{\delta}{2} \right| \quad (\text{答})$$

(3) 問1 (2) の結果より

$$\begin{aligned} B^2 &= 4A^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} \\ &= 4A^2 \frac{1 + \cos \delta}{2} \\ &= 2A^2 (1 + \cos \delta) \end{aligned}$$



であるから, B^2 - δ グラフは右上図のように表される。 (答)

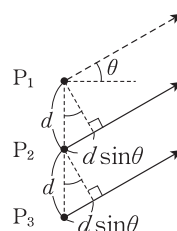
(4) $\delta = 2n\pi$ のとき, B^2 は最大である。このことと①より

$$2\pi \cdot \frac{d \sin \theta}{\lambda} = 2n\pi \quad \therefore \sin \theta = \frac{n\lambda}{d} \quad (\text{答})$$

◀ 下のような図を答案に描いて考えるとよい。

◀ 「経路差 λ は位相差 2π に相当する」ということは押さえておくこと。よって, ここでは

$$\lambda : 2\pi = d \sin \theta : \delta$$



◀ 与えられた三角関数の公式 (和積の公式) を用いる。

◀ 与えられた三角関数の公式 (半角の公式) を用いる。

◀ 合成波の強さは B^2 に比例するから, 求める条件は, B^2 が最大になるための条件と同じ。

問2(1) P_1, P_2, P_3 からの波の合成波の点 Q での変位は

$$A \sin(\omega t + \delta) + A \sin \omega t + A \sin(\omega t - \delta) \\ = A(1 + 2 \cos \delta) \sin \omega t$$

ゆえに、合成振幅 C は

$$C = A|1 + 2 \cos \delta| \quad (\text{答})$$

(2) 問2(1)の結果より、 C が最大になる条件は

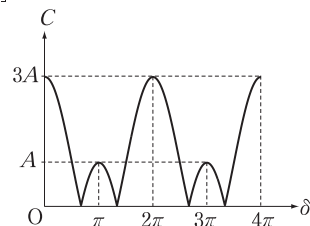
$$\delta = 2n\pi \quad (\text{答}) \quad \dots\dots\dots ②$$

(3) 合成波の強さは C^2 に比例する。ここでは、 $C > 0$ であるから、合成波の強さが最大、すなわち C^2 が最大になるのは、 C が最大になるときであることがわかる。したがって、求める条件は、①, ②より

$$2\pi \cdot \frac{d \sin \theta}{\lambda} = 2n\pi \quad \therefore \sin \theta = \frac{n\lambda}{d} \quad (\text{答})$$

◀ 与えられた三角関数の公式 (和積の公式)を用いる。

◀ 下の図のような C と δ の関係を表す C - δ グラフを描いて考えるとよい。



研究

問1(2) 点 Q での変位

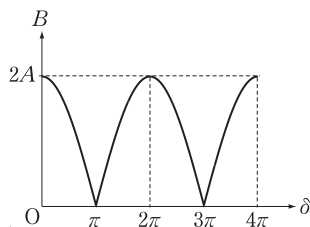
$$2A \cos \frac{\delta}{2} \sin \left(\omega t - \frac{\delta}{2} \right)$$

について、 $\cos$ の位相は時刻 t によらないが、 $\sin$ の位相は t により変化する。つまり、この場合、 $\sin\{\omega t - (\delta/2)\}$ は時間変化を表す部分であるから、その係数が振幅を表す。このように、合成波についての考察では

[時間変化する部分] $\times$ [時間変化しない部分]

の形に変形するのが定石である。

なお、 B と δ の関係を表す B - δ グラフは右図のように表される。



問2(1) 問1(2)と同様に考える。 $\sin$ の位相は t により変化するので、 $\sin \omega t$ は時間変化を表す部分であり、その係数が振幅を表す。

プラスα

問 1 と同様に、問 2 についても、 C^2 と δ の関係を表すグラフ (C^2 - δ グラフ)を描くと、右図が得られる。 C^2 と δ の関係を表すグラフには 2 種類の極大があり、 $\delta = 2n\pi$ のときの大きい極大を主極大($C^2 = (3A)^2 = 9A^2$)、 $\delta = (2n+1)\pi$ のときの小さい極大を副極大($C^2 = A^2$)という。波の干渉の立場で考えれば、主極大は、各波源からの波がすべて強め合う場合で、副極大は、たとえば、 P_1 、 P_2 からの波が弱め合い、結果的に P_3 からの波だけが残る場合のように、3 つの波源からの波のうち 2 つが弱め合い、結果的に 1 つだけが残る場合である。また、本問を光の場合に対応させると、問 1 は 2 重スリット、問 2 は問 1 とスリット間隔の等しい 3 重スリットによる干渉に相当する。このとき、Q を通り、3 つの点波源が並ぶ直線に平行になるようにスクリーンを置くと、どちらの場合も同じ位置に最も明るい明線が現れるが、問 2 では、さらに、この明線の間に、副極大に相当する、あまり明るくない明線が現れる。なお、各場合において、最も明るい明線の強度は、問 1 では、もとの光の強度の 2^2 倍、問 2 では、 3^2 倍である。これから予想されるように、スリット数 N の回折格子では、最も明るい明線の強度は、1 つの波源(スリット)からの光の強度の N^2 倍になる。ただし、これは、スクリーンに達するエネルギーが N^2 倍になることを表しているのではなく、最も明るい明線の強度が、1 つの波源からの波の強度の N^2 倍になるに過ぎないことに注意。

