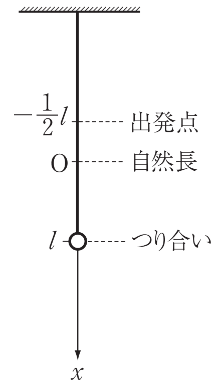
2 問題

《単振動》

図のように，軽いゴムひもの上端を天井に固定し，下端に質量 m の小球をつないだところ，ゴムひもが自然長(自然の長さ)から l だけ伸びた状態でつり合った。ゴムひもは，自然長から伸びているときには，その伸びに比例する大きさの弾性力を及ぼすが，たるんでいるときには力を及ぼさないものとする。以下では，ゴムひもが自然長のときの小球の位置を原点Oとする鉛直下向き正の x 軸をとって考える。初めに，小球を座標 $x=-l/2$ の位置まで持ち上げ，静かに放したところ，小球は周期運動を始めた。重力加速度の大きさを g とし，**問1〜問5** では，小球が他の物体や天井に衝突することはないものとする。（25点）



問1　小球が原点Oを通過する瞬間の速さを求めよ。(3点)

問2　小球が原点Oを鉛直下向きに通過してから，次に原点Oを鉛直上向きに通過するまでの間について考える。座標 x の位置を通過する瞬間の小球の加速度を a（鉛直下向き正）として，運動方程式を立てることにより，この間の小球の運動が単振動であることを示せ。また，この単振動の，中心の座標，周期，および振幅をそれぞれ求めよ。(8点)

問3　この小球の運動の最下点の座標を求めよ。(3点)

問4　この運動における，小球の速さの最大値を求めよ。(3点)

問5　小球を放してから，初めて小球が出発点($x=-l/2$)に戻るまでに要する時間を求めよ。(5点)

問6　座標 $x=2l$ の位置に水平な床を固定する。小球は，この床と瞬間的に弾性衝突するものとして，小球を放してから，初めて小球が出発点($x=-l/2$)に戻るまでに要する時間を求めよ。(3点)

ポイント

一般に，単振動では，座標 x の位置を通過する瞬間の加速度 a は，角振動数 ω，振動中心の座標 $x=c$ を用いて，$a=-\omega^2(x-c)$ と表される。

解答

問 1 $\sqrt{gl}$ **問 2** 証明は「解説」参照，中心の座標：$x=l$，周期：$2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，振幅：$\sqrt{2}\,l$

問 3 $x=(\sqrt{2}+1)l$ **問 4** $\sqrt{2gl}$ **問 5** $\left(\dfrac{3}{2}\pi+2\right)\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ **問 6** $(\pi+2)\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

解説

問 1 小球が落下を始めてから，初めて原点 O を通過するまでの間に小球が受ける力は重力だけであるので，原点 O を重力による位置エネルギーの基準とし，求める速さを v とすると，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2=mg\cdot\frac{1}{2}l \qquad \therefore\ v=\boldsymbol{\sqrt{gl}} \quad \textbf{(答)} \quad \cdots\cdots①$$

◀ この間の小球の運動は自由落下なので，等加速度運動の式を立てて解いてもよい。

問 2 ゴムひもの弾性定数を k とすると，ゴムひもの伸びが l の状態でのつり合いを表す式は

$$kl=mg \quad \cdots\cdots②$$

◀ ゴムひもは，伸びているときにのみ，小球に力を及ぼすことに注意。

座標 x の位置を通過する瞬間の弾性力は，$+x$ 向き(鉛直下向き)を正として $-kx$ と表される。したがって，小球の運動方程式は

◀ $x>0$ の場合，小球の座標は，ゴムひもの伸びに等しい。

$$\boldsymbol{ma}=-kx+mg=\boldsymbol{-\frac{mg}{l}(x-l)} \quad \cdots\cdots③$$

◀ ②より得られる $k=mg/l$ を代入して整理した。

上式より，**小球の運動は単振動である**ことがわかる。 **(答)**

ここで，この単振動の角振動数を ω，周期を T，振動の中心の座標を $x=c$ とすると，③より

$$a=-\frac{g}{l}(x-l)=-\omega^2(x-c)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{c=l} \quad \textbf{(答)} \qquad \omega=\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \cdots\cdots④$$

◀ この結果より，単振動の振動中心は，つり合いの位置であることがわかる。

$$\therefore\ T=\frac{2\pi}{\omega}=\boldsymbol{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \quad \textbf{(答)}$$

求める振幅を A として，小球が原点 O を通過する瞬間と，最下点に達する瞬間について，単振動のエネルギー保存を考えると

◀ 単振動のエネルギー保存では，運動エネルギーと，単振動の位置エネルギー($kX^2/2$)の和が保存される。ここで X は振動中心からの変位であることに注意(「研究」参照)。

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kl^2=\frac{1}{2}kA^2$$

◀ 次式のように通常の力学的エネルギー保存則を用いてもよい。

$$\frac{1}{2}mv^2+mg(l+A)=\frac{1}{2}k(l+A)^2$$

上式と①，②より，k，v を消去すると

$$\frac{1}{2}mgl+\frac{1}{2}mgl=\frac{1}{2}\cdot\frac{mg}{l}\cdot A^2$$

$$\therefore\ A=\boldsymbol{\sqrt{2}\,l} \quad \textbf{(答)} \quad \cdots\cdots⑤$$

問3　小球の軌道の最下点は，振動中心($x=l$)よりも，さらに振幅 $\sqrt{2}\,l$ の分だけ下方に位置するので，求める座標は

$$l+\sqrt{2}\,l=(\sqrt{2}+1)\boldsymbol{l} \qquad \textbf{(答)}$$

問4　単振動では，振動中心を通過する瞬間，速さが最大となり，この瞬間の速さは $A\omega$ なので，④，⑤より

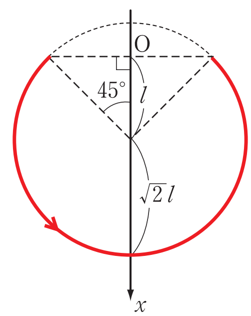
$$A\omega=\sqrt{2}\,l\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}=\boldsymbol{\sqrt{2gl}} \qquad \textbf{(答)}$$

◀単振動では，振動中心を通過する瞬間に速さが最大になり，その値は以下のように表される。
[振幅]×[角振動数]
なお，エネルギー保存の式を立てて振動中心での速さを求めてもよい。

問5　小球が落下を始めてから，初めて原点Oを通過するまでに要する時間を t とすると，この間の小球の運動は自由落下であるから

$$\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}l \qquad \therefore\ t=\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ところで，$x\geqq 0$ の範囲での小球の運動は，振動中心の座標 $x=l$，振幅 $\sqrt{2}\,l$ の単振動であり，この運動は，$x=l$ を中心とする半径 $\sqrt{2}\,l$ の円運動の x 軸への正射影に等しい。このことと，振動中心から原点Oまでの距離が l であることより，この単振動は，右図の太い実線に沿った円運動の，x 軸への正射影であることがわかる。つまり，この間の単振動に要する時間は，3/4 周期($=3T/4$)に等しい。



その後，小球は，原点Oを上向きに通過するが，運動の対称性より，原点Oを上向きに通過してから，出発点に戻るまでに要する時間は，先ほど求めた t に等しい。

したがって，求める時間は

$$\frac{3}{4}T+2t=\frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}+2\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$=\left(\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi+2}\right)\boldsymbol{\sqrt{\frac{l}{g}}} \qquad \textbf{(答)}$$

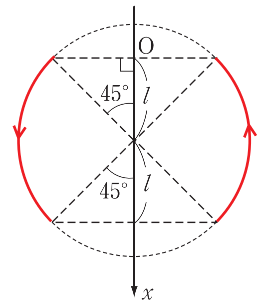
◀**問2**で得た $T\,(=2\pi\sqrt{l/g})$ を代入した。

問 6　振動中心$(x=l)$から床の位置$(x=2l)$までの距離は

$$2l-l=l<\sqrt{2}\,l\,(=A)$$

ゆえに，小球は，**問 2** で考えた単振動の途中で，床に衝突する。

また，床との衝突は弾性衝突であるので，床との衝突後，小球の速度は反転し，原点 O を上向きに通過するまでの間，床との衝突前と同じ単振動を逆向きに行う。よって，**問 5** と同様に考えれば，この単振動は右図の太い実線に沿った円運動の x 軸への正射影になるので，この間の単振動に要する時間の和は，1/2 周期$(=T/2)$に等しいことがわかる。



さらに，小球が落下を始めてから初めて原点 O を下向きに通過するまでに要する時間，および，単振動の後，原点 O を上向きに通過してから，出発点に戻るまでに要する時間は，いずれも **問 5** で求めた t と等しい。

したがって，求める時間は

$$\frac{1}{2}T+2t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}+2\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$=\boldsymbol{(\pi+2)\sqrt{\frac{l}{g}}}\qquad \textbf{(答)}$$

◀ **問 2** で得た $T\,(=2\pi\sqrt{l/g})$ を代入した。

研究

問 2　物体に働く力が $-kx+[定数]=-k(x-c)$（ただし，$k>0$）のように表されるとき，すなわち，つり合いの位置$(x=c)$に向かう向きで，大きさが振動の中心からのずれに比例する復元力が働くとき，この物体の運動は単振動である。

次に，振幅であるが，これは，力学的エネルギー保存則を用いて求めるのが一般的な解法である。ここでは，とくに，単振動のエネルギー保存を考える場合に注意すべきことを述べておく。単振動の位置エネルギーは $k(x-c)^2/2$ のように表されるが，この場合の $x-c$ は振動中心からの変位を表すのであり，ゴムひもやばねの伸びではないことを押さえておくこと。もちろん，通常の力学的エネルギー保存則を用いて解いてもよいが，その場合は，重力による位置エネルギーと弾性力による位置エネルギーを考えなければならないので，計算が面倒になる場合が多い。