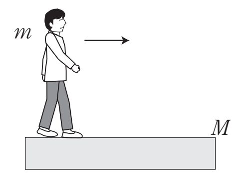
力学２

導入

到達目標

運動方程式，力学的エネルギーに関する式が正しく立てられるようになる。

問題１



水平でなめらかな床の上に，水平な上面をもつ質量 M の台を置く。台の上の左端には質量 m の人が乗っており，初め，台と人はともに静止している。この状態から，人が，台の上で，台に対して水平右向きに一定の加速度で運動する場合について考える。人と台が及ぼし合う力の水平成分の大きさを f とする。

問１　人が台に対して動く加速度の大きさを $a(>0)$，台が床に対して動く加速度の大きさを $b(>0)$ として，人が床に対して動く加速度の大きさ $a'(>0)$ を，a，b を用いて表せ。

問２　床に静止した観測者から見た人，および台の運動方程式を，**問２**で与えた a，b，および m，M，f のうちから必要なものを用いてそれぞれ表せ。

問３　a，b を，m，M，f のうちから必要なものを用いてそれぞれ表せ。

解　答

問１　水平方向の運動について，人が右向きに動くのは，人が台から右向きで大きさ f の力を受けるからである。その反作用として，台は人から左向きで大きさ f の力を受けるため，台は左向きに動く。

床に静止した観測者から見て，人は水平右向きに加速し，台は水平左向きに加速する。このため，台とともに動く観測者から見た人の加速度の大きさ a は，床に静止した観測者から見た人の加速度の大きさ a' よりも，床に対する台の加速度の大きさ b だけ大きくなるから

$$a = a' + b \qquad \therefore\ \ a' = \boldsymbol{a - b}$$

問２　床に静止した観測者から見て，質量 m の人は，大きさ f の力を受けて大きさ a' の加速度で運動するので

$$ma' = f \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{m(a-b) = f}$$

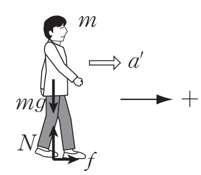
床に静止した観測者から見て，質量 M の台は，大きさ f の力を受けて大きさ b の加速度で運動するので

$$\boldsymbol{Mb = f}$$

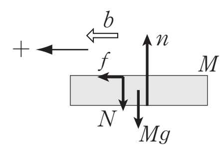
問３　**問２**の２式より

$$b = \boldsymbol{\frac{f}{M}} \qquad \therefore\ \ a = \frac{f}{m} + b = \boldsymbol{\frac{M+m}{M}\cdot\frac{f}{m}}$$

◀下の図では，人と台が及ぼし合う垂直抗力の大きさを N，台が床から受ける垂直抗力の大きさを n としている。



$N = mg$
（ g は重力加速度の大きさ）



$n = Mg + N = (M+m)g$

◀**問３**の a，b を代入すると，a' は以下のように求まる。

$$a' = a - b$$
$$= \frac{M+m}{M}\cdot\frac{f}{m} - \frac{f}{M}$$
$$= \frac{f}{m}$$

今回の映像視聴はコチラから

YQA6B1-Z1J1-02

解　説

問１，問２　正の向きを決めて式を立ててみよう。水平右向きを正の向きにとり，人が台に対して動く加速度を α，台が床に対して動く加速度を β，人が床に対して動く加速度を α' とする。台に対する人の相対加速度を考えると，α，β，α' の関係は

$$\alpha = \alpha' - \beta$$

床に静止した観測者から見た人，および台の運動方程式はそれぞれ

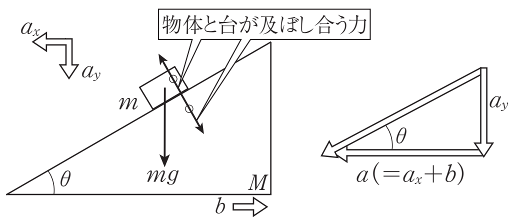
$$m\alpha' = +f, \qquad M\beta = -f$$

これらの式から α，β，α' が求まり，$|\alpha| = a$，$|\beta| = b$ とすれば a，b も求まる。

問２　運動の法則は，床(地面)に静止した観測者から見た運動について成り立つ。一方，台は床に対して静止しておらず，加速度運動している。このため，台とともに加速度運動する観測者から見て大きさ a の加速度で運動する物体の運動方程式(本問の場合は $ma = f$ といった式)は成り立たない。なお，静止している物体と床に対して等速度で運動している物体では，力の作用する様子が同等である。このことから，床に対して等速度で運動する観測者から見ても，運動の法則は成り立つ。

研　究

本問では同一方向に動く 2 物体の相対運動を考察したが，ここでは異なる方向に動く 2 物体の相対運動を扱っておく。水平でなめらかな床の上に，水平方向と角度 θ をなすなめらかな斜面をもつ台があり，この斜面に沿って，物体が滑っている場合について考える。台，物体の質量をそれぞれ M，m とし，重力加速度の大きさを g とする。



物体と台は斜面に垂直な方向の力を及ぼし合い，物体が台から受ける力は水平左向きの成分を，台が物体から受ける力は水平右向きの成分をもつ。運動の法則より，物体の加速度の水平成分は左向き，台の加速度(の水平成分)は右向きである。床に静止した観測者から見た，物体の加速度の水平成分の大きさ，台の加速度(の水平成分)の大きさをそれぞれ a_x，b とする。台とともに動く観測者から見た物体の加速度の水平成分の大きさ a は，床に静止した観測者から見た人の加速度の大きさ a_x よりも，床に対する台の加速度の大きさ b だけ大きくなるから

$$a = a_x + b$$

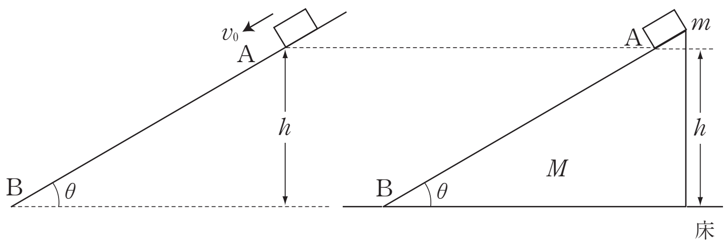
また，床に静止した観測者から見た，物体の加速度の鉛直成分の大きさを a_y とする。台は鉛直方向には加速度をもたないので，台とともに動く観測者から見た物体の加速度の鉛直成分の大きさは $a_y - 0 = a_y$ である。ここで，「物体が斜面に沿った方向に加速度運動する」という**束縛条件**より，台とともに動く観測者から見た物体の加速度の向きは，斜面に平行なので

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a} = \frac{a_y}{a_x + b}$$

上式と，物体の水平・鉛直方向の運動方程式と台の運動方程式を連立させると，a_x，a_y，b，［物体と台が及ぼし合う力の大きさ］を，M，m，g，θ を用いて表すことができる。

問題2

以下の問いに答えよ。ただし，図の斜面の傾きを θ，重力加速度の大きさを g とする。



問１　なめらかな斜面があり，質量 m の物体が斜面上の点 A から点 B まで滑り降りた。点 A と点 B の高さの差を h，点 A を通過する瞬間の物体の速さを v_0 とする。点 B を通過する瞬間の物体の運動エネルギーを求めよ。

問２　**問１**で，斜面が粗く，物体と斜面の間の動摩擦係数が μ の場合にも，物体は点 B を通過したとする。この場合の，点 B を通過する瞬間の物体の運動エネルギーを求めよ。

問３　なめらかで水平な床に，なめらかな斜面をもつ質量 M の台を置き，斜面上の点 A に質量 m の物体を置く。全体を静止させた状態から静かに放すと，物体と台は運動し始めた。点 A より高さ h だけ下方の斜面上の点 B を物体が通過する瞬間の物体および台の速さをそれぞれ v，V とする。このとき，v，V，m，M，h，g の間に成り立つ力学的エネルギーに関する式を立てよ。ただし，点 B を通過する瞬間，物体はまだ床に達していないとする。

解　答

問１　物体は重力の向きに距離 h だけ移動するので，重力がした仕事は $mg \cdot h$ である。

エネルギーの原理より，物体の運動エネルギーの変化量は物体がされた仕事に等しい。求める運動エネルギー K_1 は

$$K_1 - \frac{1}{2}mv_0{}^2 = mg \cdot h \qquad \therefore\ K_1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}mv_0{}^2 + mgh}$$

◀物体に働く垂直抗力の向きに物体は移動しないので，その力のする仕事は 0 である。

問２　物体は動摩擦力の向きと逆向きに変位するので，動摩擦力のする仕事は負の値をとる。移動距離が $h/\sin\theta$ であることに注意すると，エネルギーの原理より，求める運動エネルギー K_2 は

$$K_2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2 = mg \cdot h + \left(-\mu mg\cos\theta \frac{h}{\sin\theta}\right)$$

$$\therefore\ K_2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}mv_0{}^2 + mgh\left(1 - \frac{\mu}{\tan\theta}\right)}$$

◀動摩擦力の大きさは $\mu mg\cos\theta$ である。

問３　重力による位置エネルギーの基準点を点 B にとり，点 B から台の重心までの高さを h_0 とする。物体が点 A にあるときと点 B にあるときで，物体と台からなる系の力学的エネルギーが保存されることを表す式は

$$mgh + Mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + Mgh_0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2}$$

解　説

問１　仕事は，［重力の大きさ］×［重力の向きへの移動距離］として求めたが，［重力の斜面に平行な成分の大きさ］×［斜面に平行な方向の移動距離］と考えても得られる結果は同じである。

$$[\text{仕事}] = mg \cdot h = mg\sin\theta \cdot \frac{h}{\sin\theta} = mgh$$

問１，問２　重力による位置エネルギーの基準点を点Ｂにとる。**問１**の答の式を書き換えると

$$K_1 + mg \cdot 0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$$

となり，力学的エネルギー保存の式が得られる。これに対し，**問２**の答の式を書き換えると

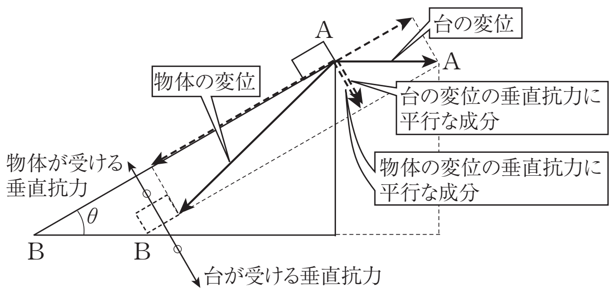
$$K_2 + mg \cdot 0 = \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh\right) - \frac{\mu}{\tan\theta}mgh$$

これは，動摩擦力のした仕事の分だけ，力学的エネルギーが失われることを表す式である。

一般に，重力やばねの弾性力を**保存力**といい，動摩擦力や糸の張力などを**非保存力**という。保存力だけが仕事をするとき，力学的エネルギーは保存される。これに対し，非保存力が仕事をするとき，力学的エネルギーは保存されない。

研　究

問３　図は，物体が点Ａにあるときの物体と台を実線で，また，物体が点Ｂにあるときの物体と台を破線で表したものである。物体が斜面上を滑っている間，物体と台は，斜面に垂直な方向の垂直抗力を及ぼし合う。床に静止した観測者から見て，物体の変位と物体が受ける垂直抗力のなす角は 90° より大きいため，物体が受ける垂直抗力は負の仕事をする。この仕事を $W(<0)$ とすると，物体についてエネルギーの原理より



$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = mgh + W$$

同様に，台の変位と台が受ける垂直抗力のなす角は 90° より小さいため，台が受ける垂直抗力は正の仕事をする。この仕事を $W'(>0)$ とすると，台についてエネルギーの原理より

$$\frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}M \cdot 0^2 = W'$$

ここで，物体および台の変位を，垂直抗力に平行な成分と垂直な成分に分けて考えたとき，図より，それらの変位の垂直抗力に平行な成分は等しい。このことと，及ぼし合う垂直抗力が同大逆向きであることより，垂直抗力のする仕事について $W + W' = 0$ が成り立つ。上で立てた２式の和をとって W と W' を消去したものが，**問３**の答である。

垂直抗力は非保存力であるため，一般に垂直抗力が仕事をするとき，力学的エネルギーは保存されない。ただし，**問３**のような垂直抗力を及ぼし合う２物体があり，垂直抗力の仕事の和が０になる場合は，２物体からなる系について力学的エネルギーが保存される。