

1

問題

p, q を実数の定数とする。方程式 $x^3 + px^2 + qx + 1 = 0$ が $x = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ を解にもつとき、 p, q の値を求め、 $x = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 以外の解をすべて求めよ。

着眼点

実数係数の方程式 $x^3 + px^2 + qx + 1 = 0$ が虚数 $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ を解にもつことから、 p, q の関係式を導くことを目指せばよく

- ・ 共役複素数 $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ も解であることを用いる
- ・ 与式に $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ を代入する

などの方法がある。「解答」では、共役複素数 $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ も解であることに着目して、整式の割り算を用いてみよう。

解答

$f(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ とおく。実数係数の方程式 $f(x) = 0$ が虚数 $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ を解にもつとき、それと共役な複素数 $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ も

解にもつ。 $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ を解にもつ2次方程式は、解と係数の関係より

$$x^2 + x + 1 = 0$$

であるから、 $f(x)$ は $x^2 + x + 1$ で割り切れて

$$f(x) = (x^2 + x + 1)(x + p - 1) + (q - p)x + 2 - p$$

したがって

$$q - p = 0, 2 - p = 0$$

が成り立つ。よって求める p, q は

$$p = q = 2 \quad \text{答}$$

であり、 $f(x)$ は

$$f(x) = (x^2 + x + 1)(x + 1)$$

となるから、 $f(x) = 0$ の $x = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 以外の解は

$$x = -1, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \quad \text{答}$$

◀ $x^3 + px^2 + qx + 1$ を $x^2 + x + 1$ で割った。このとき、余りは0になる。

◀ $f(x)$ に $p = q = 2$ を代入して整理した。

解説

1 別解 解と係数の関係を利用する

「解答」では因数定理を用いて p, q の関係式を求めたが、解と係数の関係から p, q 、(方程式の解)の関係式を導く方針もある。

実際に紹介する前に、3次方程式の解と係数の関係について確認しておこう。

3次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の3つの解を α, β, γ とするとき

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\ &= ax^3 - a(\alpha + \beta + \gamma)x^2 + a(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - a\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} b &= -a(\alpha + \beta + \gamma), \quad c = a(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha), \quad d = -a\alpha\beta\gamma \\ \therefore \quad \alpha + \beta + \gamma &= -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \end{aligned}$$

が得られる。

さて、それでは上で確認したことを踏まえて解と係数の関係を用いた方針を紹介しよう。

実数係数の方程式 $f(x) = 0$ が虚数 $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ を解にもつとき、それと共役な複素数 $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

も解にもつ。いま、残りの解を a とすると、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} + a = -p \\ \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \cdot a + a \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = q \\ \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \cdot a = -1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} -1 + a = -p & \cdots \cdots \cdots \text{①} \\ 1 - a = q & \cdots \cdots \cdots \text{②} \\ a = -1 \end{cases}$$

$a = -1$ を①, ②に代入して $p = q = 2$ が得られる。

2 別解 直接代入して計算する

計算はやや大変だが、 $x^3 + px^2 + qx + 1 = 0$ の式に $x = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ を代入して計算してもよい。
実際に計算すると

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) &= \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^3 + p\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^2 + q\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) + 1 \\ &= 1 + p\left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right) + q\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) + 1 \\ &= 2 - \frac{1}{2}(p + q) + \frac{\sqrt{3}}{2}(q - p)i \end{aligned}$$

となる。 $f\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) = 0$ で、 p, q は実数なので、複素数の相等より

$$2 - \frac{1}{2}(p + q) = 0, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}(q - p) = 0$$

これを解いて、 $p = q = 2$ が得られる。