# 3 問題

空間内に同一平面上にない 4 点 O, A, B, C があり, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ に対して

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$$

をみたす。辺 OA, OB, OC の中点をそれぞれ D, E, F とし, 辺 AB, BC, CA の中点をそれぞれ L, M, N とする。3 直線 DM, EN, FL は 1 点で交わることを示せ。また, 6 点 D, E, F, L, M, N は同一球面上に存在することを示せ。

## 着眼点

空間図形の内容で, ベクトルを利用する論証問題。“直稜四面体” という四面体を題材とした。

3 直線が 1 点で交わることを示すのだから, まずは

“2 直線の交点をベクトル表示する”

ことを考えるのが素直な解法だろうが,「**解答**」では一歩進めて, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表したときの式の対称性などから

3 つの線分はそれぞれの中点で交わるのではないか？

と予想し, その**予想を証明（◀1）**してみよう。

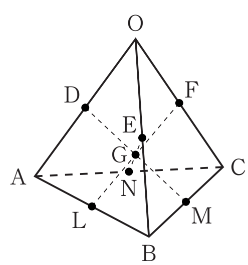
後半も同様に

前半で求めた交点を中心とする同一球面上にあるのではないか？

と予測してみよう。

## 解　答

OA, OB, OC, AB, BC, CA の中点が, それぞれ D, E, F, L, M, N なので




$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}$$

◀まず, 各辺の中点を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表す。

であり, DM, EN, FL の中点をそれぞれ $G_1$, $G_2$, $G_3$ とすると

$$\overrightarrow{OG_1}=\overrightarrow{OG_2}=\overrightarrow{OG_3}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

となり, 3 直線 DM, EN, FL はどの 2 つも一致することはないので, これら 3 直線は

◀1
**各線分の中点で交わることを示すために, 中点のベクトル表示が一致することをいう。**

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

をみたす1点Gで交わる。 (証明終)

◀Gは四面体OABCの重心に他ならない。

次に

$$\overrightarrow{\mathrm{DM}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EN}}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{FL}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$$

であり

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=k$$

とおくと

◀1 点Gが球の中心と予想して示す。

$$|\overrightarrow{\mathrm{DM}}|^2=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2k)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{EN}}|^2=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2k)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{FL}}|^2=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2k)$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{DM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{EN}}|=|\overrightarrow{\mathrm{FL}}|$$

また，点GはDM，EN，FLの中点なので

$$|\overrightarrow{\mathrm{DG}}|=|\overrightarrow{\mathrm{EG}}|=|\overrightarrow{\mathrm{FG}}|=|\overrightarrow{\mathrm{LG}}|=|\overrightarrow{\mathrm{MG}}|=|\overrightarrow{\mathrm{NG}}|$$

であるから，6点D，E，F，L，M，NはGを中心とする同一球面上にある。 (証明終)

## 解　説

### 1 別解 2直線の交点を共線条件を用いて求めると……

「**解答**」では，DM，EN，FLがそれぞれの中点で交わることを見抜いて証明したわけだが，共線条件を利用して交点を求めてみると次のようになる。

直線DMとENが交わるとして，その交点をPとすると，Pは直線DM上の点として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(1-s)\cdot\frac{1}{2}\vec{a}+s\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}+s\vec{c}}{2}\quad(s\text{は実数})$$

また，直線EN上の点として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OE}}+t\overrightarrow{\mathrm{ON}}=(1-t)\cdot\frac{1}{2}\vec{b}+t\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)$$

$$=\frac{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}}{2}\quad(t\text{は実数})$$

とおけるから，これら2式より

$$\frac{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}+s\vec{c}}{2}=\frac{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}}{2}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は1次独立だから

$$1-s=t,\ s=1-t,\ s=t \qquad \therefore\ s=t=\frac{1}{2}$$

よって，直線 DM と EN は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

で表せる点 P で交わる。

すると

$$\overrightarrow{\mathrm{FP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{FL}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}-\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{FP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{FL}}$$

となるので，3点 F，L，P は同一直線上に存在する。

したがって，3直線 DM，EN，FL は1点 P で交わる（P は「**解答**」の G に一致する）。

## 2 補足 G について～四面体の重心

3点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を頂点とする三角形 ABC の重心 G($\vec{g}$) が

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

と表せたのと同様に，空間において A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，D($\vec{d}$) を頂点とする四面体 ABCD に対して

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

で表される点 G($\vec{g}$) を四面体 ABCD の重心という。

本問では，4つの頂点が O，A，B，C だから，始点を O として重心 G を表示すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{4}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{4}$$

となり，これは「**解答**」の点 G に他ならない。

四面体の重心の性質として

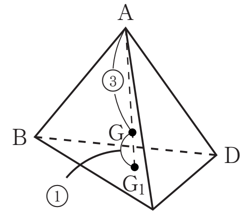
(ア)向かい合う2辺の中点を結ぶ3直線は重心 G で交わる

を示したわけだが

(イ)頂点と対面の三角形の重心を結ぶ4直線は重心 G で交わる

などの性質も知られている。

(イ)についても，本問の「**解説 1**」と同様に，交点を求めて証明してもよいが，「交点 = 重心」がわかっているのだから，重心が4直線上にあることを示すのが早い。つまり，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，D($\vec{d}$) に対して，①を △BCD の重心 $G_1(\vec{g_1})$ と A を結ぶ直線上の点を表すように変形すればよいわけで




$$\vec{g_1}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$$

であるから

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}=\frac{\vec{a}+3\cdot\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}}{4}$$

$$=\frac{\vec{a}+3\vec{g_1}}{4}$$

と変形すれば，G は $AG_1$ を 3：1 に内分する点とわかる。

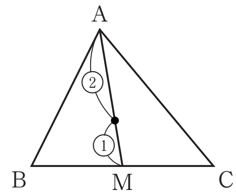
また，A を始点として

$$\vec{b}=\overrightarrow{AB},\ \vec{c}=\overrightarrow{AC},\ \vec{d}=\overrightarrow{AD},\ \vec{g_1}=\overrightarrow{AG_1},\ \vec{g}=\overrightarrow{AG}$$

とすれば

$$\vec{g}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}=\frac{3}{4}\cdot\vec{g_1}$$

と簡単に処理することもできる。



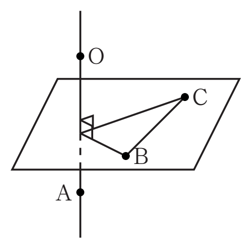

なお，G が $AG_1$ を 3：1 に内分するのは，三角形 ABC の重心が中線 AM（M は BC の中点）を 2：1 に内分するのと対応している（次元が上がっただけ）。

## 3 補足 直稜四面体

条件 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ より

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0,\ \vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0,\ \vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\ \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$




すなわち，本問の四面体 OABC は

$$OA\perp BC,\ OB\perp CA,\ OC\perp AB$$

であり，3 組の対辺が垂直という条件をみたすことがわかる。

このような四面体を直稜四面体といい，等面四面体（4 つの面がすべて合同な鋭角三角形）と同様に，ときどき入試で題材とされる四面体である。

直稜四面体のもつ性質として

1 つの頂点から対面に下ろした垂線の足は，その三角形の垂心

対辺の中点を結ぶ 3 つの線分は長さが等しい

対辺の長さの 2 乗の和は 3 組とも等しい

などが知られている。