4 問題

n を自然数とし，S_n を $(2^{n+1}-1)$ 個の整数からなる集合とする。このとき，各 n に対して，S_n の部分集合 T_n で次の (A)，(B) の条件をともにみたすものが存在することを証明せよ。

(A) T_n の要素の個数は 2^n 個である。

(B) T_n のすべての要素の和は 2^n で割り切れる。

着眼点

集合に関する証明問題である。問題の意図が読み取りにくいので，まずは，$n=1$，2 の場合などで具体的に考えてみて状況を把握しよう。

$n=1$ のときは，**S_1 は 3 個の整数からなり，偶数と奇数のいずれか一方は 2 個以上含まれる（◀1）**ので，偶奇が一致する 2 つの整数を組み合わせて T_1 をつくればよい。$n=2$ のときも，同様に 4 の剰余で分類すれば証明できそうだが，$n \geqq 3$ のことを考慮すると，剰余で分類して一般化するのは現実的でなさそう。

そこで，自然数 n に関する証明であることに着目し，**数学的帰納法の利用（◀2）**に気づきたい。帰納法の第二段の証明は，$n=2$ を証明するときに $n=1$ の結果が使えないかどうかを考えてみると方針がみえてくる（「**解説 1**」参照）。

解　答

(i)　$n=1$ のとき

S_1 は 3 個の整数からなる集合で

(I)奇数が 2 個以上

(II)偶数が 2 個以上

のいずれかである。これらに対し

(I)のとき，T_1 を S_1 に含まれる 2 個の奇数からなる集合

(II)のとき，T_1 を S_1 に含まれる 2 個の偶数からなる集合

とすると，T_1 は条件 (A)，(B) をともにみたす。

(ii)　$n=k$ のとき，S_k に対し，S_k の部分集合 T_k で，条件 (A)，(B) をともにみたすものが存在すると仮定する。

$n=k+1$ のとき，S_{k+1} は要素の個数が $(2^{k+2}-1)$ 個の整数からなる集合である。

まず，S_{k+1} の部分集合で，要素の個数が $(2^{k+1}-1)$ 個の集合 $S_{k,1}$ をとる。帰納法の仮定より，$S_{k,1}$ の部分集合 $T_{k,1}$ で，$n=k$ のときの条件 (A)，(B) をともにみたすものが存在する。

ここで

$$2^{k+2}-1-2^k=2\cdot 2^{k+1}-2^k-1>2^{k+1}-1$$

なので，S_{k+1} から $T_{k,1}$ を除いた集合から再び要素の個数が $2^{k+1}-1$ 個の部分集合 $S_{k,2}$ をとることができる。そして，帰納法の仮定より，$S_{k,2}$ の部分集合 $T_{k,2}$ で，$n=k$ のときの条件 (A)，(B) をともにみたすものが存在する。

さらに

◀2
数学的帰納法を利用する方針である。

◀1
部屋割り論法である（「解説 2」参照）。

◀以下，何をしているのかよくわからなかった人は「**解説 1**」を先に読んでみよう。$n=2$ の場合で具体的に考えると，考えやすくなるはずだ。

◀S_{k+1} から $T_{k,1}$ を除いた集合の要素の個数を考えて，部分集合 $S_{k,2}$ がとれることを確認する。

$$2^{k+2}-1-(2^k+2^k)=2\cdot 2^{k+1}-1-2^{k+1}=2^{k+1}-1$$

なので，S_{k+1} から $T_{k,1}$，$T_{k,2}$ を除いた集合 $S_{k,3}$ に帰納法の仮定が適用でき，$S_{k,3}$ の部分集合 $T_{k,3}$ で，$n=k$ のときの条件 (A)，(B) をともにみたすものが存在する。

さて，$T_{k,1}$，$T_{k,2}$，$T_{k,3}$ のすべての要素の和をそれぞれ $2^k a_1$，$2^k a_2$，$2^k a_3$ (a_1，a_2，a_3は整数) とすると，a_1，a_2，a_3 の中には偶奇が一致するものが存在する。それが a_i と a_j のとき

◀S_1 を考察したときと，同じ考え方である。

$$T_{k+1}=T_{k,i}\cup T_{k,j}$$

とすると，$T_{k,1}$，$T_{k,2}$，$T_{k,3}$ は互いに共通部分をもたないので，T_{k+1} の要素の個数は

◀$T_{k,1}$，$T_{k,2}$，$T_{k,3}$ の作り方より明らかだろう。

$$2^k+2^k=2\cdot 2^k=2^{k+1}\text{(個)}$$

また，T_{k+1} のすべての要素の和は

$$2^k a_i+2^k a_j=2^k(a_i+a_j)$$

ここで，a_i と a_j の偶奇が一致するので，a_i+a_j は 2 の倍数である。よって，T_{k+1} のすべての要素の和は 2^{k+1} の倍数となる。

以上より，T_{k+1} は条件 (A)，(B) をともにみたす。

(i)，(ii)より，各 n に対して S_n の部分集合 T_n で条件 (A)，(B) をともにみたすものが存在する。　(証明終)

解　説

1 補足 $n=2$ の場合で考えてみると……

「**着眼点**」でも触れたように，n のままで考えていても，証明の方針が見えてこない場合は

n に具体的な値をいれて考えてみる

ことで，方針が見えてくる場合がある。「具体的な場合で考え，一般的な仕組みを発見する」ということを意識してみよう。以下，$n=2$ の場合を考える。

S_2 は $2^3-1=7$（個）の整数からなる集合である。

まず，S_2 の部分集合で，3 個の整数からなる集合 $S_{1,1}$ をとると，「**解答**」(i)より，集合 $S_{1,1}$ の部分集合 $T_{1,1}$ で，$n=1$ のときの条件 (A)，(B) をともにみたすものが存在する。

次に，S_2 から $T_{1,1}$ に含まれる要素を除いた 5 個の整数からなる集合を考える。これの部分集合で 3 個の整数からなる集合 $S_{1,2}$ をとると，同様に，集合 $S_{1,2}$ の部分集合 $T_{1,2}$ で，$n=1$ のときの条件 (A)，(B) をともにみたすものが存在する。

さらに，S_2 から $T_{1,1}$，$T_{1,2}$ に含まれる要素を除いた 3 個の整数からなる集合を $S_{1,3}$ とすると，同様に，集合 $S_{1,3}$ の部分集合で $n=1$ のときの条件 (A)，(B) をともにみたす集合 $T_{1,3}$ が存在することがわかる。

ここで $T_{1,1}$，$T_{1,2}$，$T_{1,3}$ のそれぞれの要素の和を

$$2a_1,\ 2a_2,\ 2a_3\ (a_1,\ a_2,\ a_3 \text{ は整数})$$

とおくと，a_1，a_2，a_3 の中には偶奇が一致するものが存在する（「**解答**」の(i)と同じ議論である）。それが a_i と a_j のとき，$T_2=T_{1,i}\cup T_{1,j}$ を考えると，T_2 は $n=2$ のときの条件 (A)，(B) をともにみたす。

2 補足 部屋割り論法

この問題では「部屋割り論法」を利用している。部屋割り論法とは次の命題が真であることを利用して，証明をすることである。

命題

m 部屋に n 人を入れるとき，$m < n$ ならば相部屋が少なくとも 1 つは存在する。

本問では，「**解答**」の(i)のところでこのことを利用している。つまり，整数は 2 で割った余りで分類すると「偶数」と「奇数」の 2 種類（部屋）しかないので，3 つの整数（人）を集めて偶奇で分類すると，「偶数」と「奇数」のどちらか一方は 2 つ以上の整数が属している，という言われてみれば至極あたり前のことを用いている。

3 参考 さまざまな証明法

これまで，教科書や参考書などでさまざまな証明法を学習してきたと思う。大学入試で登場する証明法をまとめると，次のようになる。証明法を使いこなせるのは当然として，各証明法がよく使われる場面を整理しておき，適切な場面で使えるようにしておこう。

・対偶証明法：対偶命題のほうが証明しやすいとき
・背理法：「～でない」ことを証明するとき，否定的に定義されたことを証明するとき
・転換法（後述）：仮定が分類できるとき
・数学的帰納法：正の整数に関する証明をするとき
帰納的定義（n と $n+1$ などの関係）が使えるとき
・部屋割り論法：離散量の存在証明をするとき

問題によっては，どの証明方法を使うべきか見抜きにくい場合もある（本問では「数学的帰納法」と「部屋割り論法」を同時に利用しており，難しい）。証明問題で手詰まりになってしまった場合は「この問題で使えそうな証明法はないか」と考えてみてもよいだろう。

なお，転換法とは

・$A_1 \Longrightarrow B_1$，$A_2 \Longrightarrow B_2$，$\cdots$，$A_n \Longrightarrow B_n$ がすべて真
・A_1，A_2，$\cdots$，A_n がすべての場合を尽くす
・結論 B_1，B_2，$\cdots$，B_n がどの 2 つも同時に成り立つことはない

となるとき

$$B_1 \Longrightarrow A_1,\ B_2 \Longrightarrow A_2,\ \cdots,\ B_n \Longrightarrow A_n$$

が成り立つ，というものである。たとえば，3 辺の大きさが a，b，c $(a > b > c)$ である $\triangle$ABC について

$\triangle$ABC が鋭角三角形 $\Longrightarrow a^2 < b^2 + c^2$
$\triangle$ABC が直角三角形 $\Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2$
$\triangle$ABC が鈍角三角形 $\Longrightarrow a^2 > b^2 + c^2$

が成り立つが，それぞれの逆についても成り立つ。このことはまさに転換法によって示される。