

1 問題

《力学的エネルギー保存則》

力学的エネルギー保存則を用いて、以下の設問に答えよ。ただし、問2(1)のみ力学的エネルギー保存則を用いる必要はない。(25点)

問1 図1のように、水平でなめらかな床の上に質量 m の台車を置き、水平方向に伸び縮みする、ばね定数(弾性定数) k の軽いばねを介して、壁と台車を連結する。ばねが自然長のときの台車の左端を原点 O とし、水平右向きを正とする x 軸をとる。ばねを自然長から長さ L だけ伸ばした後、台車を静かに放したところ、台車は x 方向(水平方向)に振動した。

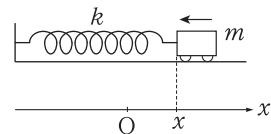
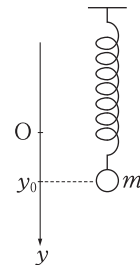


図1

- (1) 台車の左端が原点 O を通過する瞬間の、台車の速さを求めよ。(4点)
- (2) 台車の左端の x 座標がとり得る範囲を求めよ。(6点)

問2 図2のように、軽いばねの一端を天井に取り付け、他端に質量 m の小球を取り付けて、静かにつり下げた。以下では、重力加速度の大きさを g とする。また、ばねは鉛直方向にのみ伸縮するものとし、ばねが自然長のときの小球の位置を原点 O とする鉛直下向き正の y 軸をとる。このとき、つり合いの状態における小球の位置の y 座標は $y = y_0 (> 0)$ であった。



(つり合いの状態)

図2

- (1) ばねのばね定数(弾性定数)を求めよ。(3点)
- (2) 原点 O で小球を静かに放したところ、小球は y 方向(鉛直方向)に振動した。小球の位置の y 座標がとり得る範囲を求めよ。(6点)
- (3) 問2(2)における、小球の速さの最大値を求めよ。(6点)

▶問題文読解のチェックポイント

- ☒ まず、何を求めるのかを確認する。
 - ☒ 得られた答(結論)が指示に従っているかどうかを確認する。
- 問2では、ばね定数を表す記号が与えられていないことに注意

解 答

問1 座標 x の位置を通過する瞬間の台車の速さを v とすると、力学的エネルギー保存を表す式は

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kL^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(1) ①に $x=0$ を代入したときの v の値が求める値なので

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k \cdot 0^2 = \frac{1}{2}kL^2 \quad \therefore v = L\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{答}$$

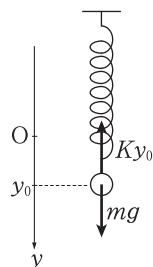
(2) ①より

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(L^2 - x^2) \geq 0 \quad \therefore -L \leq x \leq L \quad \text{答}$$

問2(1) 求めるばね定数を K とすると、つり合いの位置で小球が受ける力のつり合いの式は

$$mg + (-Ky_0) = 0$$

$$\therefore K = \frac{mg}{y_0} \quad \text{答} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$



(2) 座標 y の位置を通過する瞬間の小球の速さを V とし、原点 O を重力による位置エネルギーの基準とすると、力学的エネルギー保存を表す式は

$$\frac{1}{2}mV^2 + mg(-y) + \frac{1}{2}Ky^2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore \frac{1}{2}mV^2 = mgy - \frac{1}{2}Ky^2 \geq 0 \quad \therefore 0 \leq y \leq \frac{2mg}{K}$$

②を代入して K を消去すると

$$0 \leq y \leq 2y_0 \quad \text{答} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

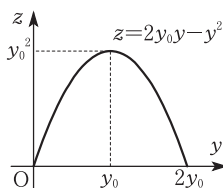
(3) ②および③より、 V は

$$V = \sqrt{\frac{2}{m} \left(mgy - \frac{mg}{2y_0}y^2 \right)} = \sqrt{\frac{g}{y_0} (2y_0y - y^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{g}{y_0} \{y_0^2 - (y - y_0)^2\}}$$

上式と④より、 V のとり得る範囲は $0 \leq V \leq \sqrt{gy_0}$ なので、 V の最大値は

$$\sqrt{gy_0} \quad \text{答}$$



答案作成のポイント

◀ 問1 全体で共通の式を用いることがあらかじめ把握できていれば、このように冒頭に記してもよい。もちろん、設問ごとに力学的エネルギー保存の式を考えて解いてもよい。

◀ 求めるのは速さであるから、正の値で答える。機械的に

$$v = -L\sqrt{\frac{k}{m}}$$

などとしないように注意。

◀ つり合いの状態で小球が受ける力には、重力(鉛直下向きで大きさ mg)、およびばねの弾性力(鉛直上向きで大きさ Ky_0)がある。力の様子は図示するよう心がけよう。

◀ V は速さであるから、 $V \geq 0$ である。

◀ 根号内の y の2次関数を、 y について平方完成した。

なお、左図のようにグラフを答案に示すと、ミスの可能性が低くなるだろう。

解説

問1では、台車の運動エネルギーとばねの弾性エネルギーの和が一定であったが、これは、一方が増加すれば他方が減少することを意味し、2種類のエネルギーが互いに他方のエネルギーに転換できることを示す。また、問2では、小球の運動エネルギー、小球の重力による位置エネルギー、ばねの弾性エネルギーの3種類のエネルギーが、和を一定に保ちつつ、相互に増減が生じている。

このように、エネルギーには、形態(種類)は可変であるが、量的には不変という特徴がある。物理で学ぶ対象が熱、波動、電気、磁気と拡大するにつれて、実にさまざまな種類のエネルギーが登場する。それらは相互に転換する場合があるが、和は一定に保たれる。

問1 単振動の知識があれば、台車の運動が、振動中心 $x=0$ (原点 O)、振幅 L の単振動であること、加えて、(1)の結果が

$$[\text{振動中心での速さ}] = [\text{振幅}] \times [\text{角振動数}] = L \times \sqrt{\frac{k}{m}}$$

であり、(2)の結果が $-L \leq x \leq L$ であることはわかるだろう。指示どおりに力学的エネルギー保存則を用いて解いた後、単振動の知識をもとに得た結論との整合性を確認することは、ミスの可能性を減らすのに役立つ。

✓ 解法・思考のステップ

問1では、台車とばねからなる系で仕事をするのは、保存力であるばねの弾性力のみであるから、台車とばねからなる系の力学的エネルギーは保存される。

同様に、問2では、小球とばねからなる系で仕事をするのは、保存力であるばねの弾性力と小球の重力のみであるから、小球とばねからなる系の力学的エネルギーは保存される。

同様に、問2(2)および(3)における小球の運動は、振動中心 $y=y_0$ 、振幅 y_0 の単振動であること、さらに、(2)の結果が $0 \leq y \leq 2y_0$ であることや、(3)の結果が

$$[\text{振動中心での速さ}] = [\text{振幅}] \times [\text{角振動数}]$$

$$= y_0 \times \sqrt{\frac{K}{m}}$$

であることはわかるだろう。

プラスα

「解説」で述べた、問1、問2の各場合の角振動数を確認しておこう。
単振動では

$$[\text{加速度}] = -[\text{角振動数}]^2 \times [\text{振動中心からの変位}]$$

が成り立つことを利用する。問1の場合は、台車の左端が座標 x の位置を通過する瞬間、台車が受けるばねの弾性力は、 $+x$ 向きを正として $-kx$ と表される。よって、台車の x 方向の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \therefore \frac{d^2 x}{dt^2} = -\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 (x-0) \quad \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \text{ は台車の加速度}\right)$$

これより、角振動数は $\sqrt{k/m}$ 、振動中心は $x=0$ であることがわかる。さらに、放した位置 $x=L$ は振動の端であることから、振幅は $(|L-0|)=L$ であることがわかる。

同様に、問2の場合は、小球が座標 y の位置を通過する瞬間、小球が受けるばねの弾性力は、 $+y$ 向きを正として $-Ky$ と表される。よって、小球の y 方向の運動方程式は

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - Ky \quad \therefore \frac{d^2 y}{dt^2} = -\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\right)^2 \left(y - \frac{mg}{K}\right) \quad \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \text{ は小球の加速度}\right)$$

これより、角振動数は $\sqrt{K/m}$ 、振動中心は $y=mg/K (=y_0)$ であることがわかる。さらに、放した位置 $y=0$ は振動の端であることから、振幅は $(|0-y_0|)=y_0$ であることがわかる。