

1

問題

a, b は整数で, $b \neq 0$ とする。実数 k に対し, x の 3 次方程式

$$x^3 - kx + 10 = 0$$

が虚数 $a + bi$ を解にもつとき, a, b, k の値を求めよ。

着眼点

3 次方程式と複素数に関する問題で, 整数の扱いと絡めた内容である。

まずは, 実数係数の方程式 $x^3 - kx + 10 = 0$ が虚数 $a + bi$ を解にもつことから a, b, k の関係式を導くことを目指せばよく

- ・ 共役複素数 $a - bi$ も解であることを用いる
- ・ 与式に $x = a + bi$ を代入する

などの方法がある。「解答」では, 共役複素数 $a - bi$ も解であることに着目して, 解と係数の関係を用いてみよう。

あとは a, b が整数なので

$$(\text{整数}) \times (\text{整数}) = (\text{整数の定数})$$

の形に帰着させて値を絞ればよい。

解答

k は実数であるから, 方程式

$$x^3 - kx + 10 = 0$$

が虚数 $a + bi$ を解にもつとき, その共役な複素数 $a - bi$ も解である。いま, 残りの解を c とすると, 解と係数の関係より

$$\begin{cases} a + bi + a - bi + c = 0 \\ (a + bi)(a - bi) + (a - bi)c + c(a + bi) = -k \\ (a + bi)(a - bi)c = -10 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 2a + c = 0 & \cdots \cdots \cdots \text{①} \\ a^2 + b^2 + 2ac = -k & \cdots \cdots \cdots \text{②} \\ (a^2 + b^2)c = -10 & \cdots \cdots \cdots \text{③} \end{cases}$$

①より $c = -2a$ を③に代入して

$$a(a^2 + b^2) = 5$$

ここで, $a^2 + b^2 > 0$ より, $a > 0$ であり, このとき, $a^2 + b^2 > a > 0$ だから

$$a = 1, a^2 + b^2 = 5 \quad \therefore a = 1, b = \pm 2$$

よって, ①より $c = -2$ であるから, これらを②に代入して

$$k = -1$$

以上より, 求める a, b, k の値は

$$a = 1, b = \pm 2, k = -1$$

答

◀「解説 1」参照。

◀ a, b について“整数”という条件が与えられているので, c を消去して, a, b の関係式を導く。

◀ $a > 0$ であり, a は整数より $a \geq 1$
さらに, $b \neq 0$ より $a^2 + b^2 > a$

◀ $a, a^2 + b^2$ はともに正の整数であるから, $a(a^2 + b^2) = 5$ をみたす $(a, a^2 + b^2)$ の組合せは $(1, 5)$ である。

解 説

1 補足 解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき、解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

が成り立つことはすでに知っているだろう。

では、今回は 3 次方程式の解と係数の関係について確認してみよう。3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\ &= ax^3 - a(\alpha + \beta + \gamma)x^2 + a(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - a\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} b &= -a(\alpha + \beta + \gamma), \quad c = a(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha), \quad d = -a\alpha\beta\gamma \\ \therefore \alpha + \beta + \gamma &= -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \end{aligned}$$

が得られる。

2 別解 $x = a + bi$ を代入する

「解説 1」を用いなくても、 a, b, k の関係式を導くことができる。

$x^3 - kx + 10 = 0$ は $a + bi$ を解にもつので

$$\begin{aligned} (a + bi)^3 - k(a + bi) + 10 &= 0 \\ a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i - ka - kbi + 10 &= 0 \\ \therefore a^3 - 3ab^2 - ka + 10 + (3a^2b - b^3 - kb)i &= 0 \end{aligned}$$

$a^3 - 3ab^2 - ka + 10, 3a^2b - b^3 - kb$ は実数であるから

$$a^3 - 3ab^2 - ka + 10 = 0, \quad 3a^2b - b^3 - kb = 0$$

ここで、 $b \neq 0$ であるから、第 2 式より

$$k = 3a^2 - b^2$$

これを第 1 式に代入すると

$$\begin{aligned} a^3 - 3ab^2 - a(3a^2 - b^2) + 10 &= 0 \\ \therefore a(a^2 + b^2) &= 5 \end{aligned}$$

が得られる。あとは、「解答」と同様に処理すればよい。

3 別解 解と係数の関係を利用する

2 次方程式の解と係数の関係を利用した解法も紹介しておこう。

実数係数の方程式 $x^3 - kx + 10 = 0$ が $a + bi$ ($b \neq 0$) を解にもつから、共役な複素数 $a - bi$ も解である。したがって、 $a \pm bi$ を解にもつ 2 次方程式は、解と係数の関係より

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$$

である。

そして、3 次方程式 $x^3 - kx + 10 = 0$ は $a \pm bi$ を解にもつから、 $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ で割り切れて

$$x^3 - kx + 10 = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)(x + 2a) + (-k + 3a^2 - b^2)x + 10 - 2a(a^2 + b^2)$$

より

$$\begin{aligned} -k + 3a^2 - b^2 &= 0, \quad 10 - 2a(a^2 + b^2) = 0 \\ \therefore k &= 3a^2 - b^2, \quad a(a^2 + b^2) = 5 \end{aligned}$$

である。あとは、「解答」と同様に処理すればよい。