式と証明
入試演習①　添削問題の導入

YME6C1-Z1J1-01

到達目標

「式と証明」では，整式や方程式，不等式などの基本的な処理と，等式や不等式の証明について学習した。これらは，高校数学を学習していく上で，つねに関わっていく内容である。したがって，入試では，単体で出題されることもあるが，微積分や数列など他単元の問題を解決する中で自然に出てくることが多く，その扱いに慣れておくことで比較的ラクに式変形の方針がみえたり，複雑な計算を回避できたりする。

今回は，整式・**3** 次方程式・不等式に注目して，やや発展的な数式処理の考え方を学んでいこう。

§1．整式の割り算の応用

整式の割り算だけが問題になることは少ないが，式の値を求める際に「次数下げ」の方法が有効になることがしばしばある。

入試問題 1　**レベル** A

$\sqrt{7}$ の小数部分を α とするとき，$f(\alpha)=\alpha^4+5\alpha^3-\alpha^2-\alpha+2$ の値を求めなさい。

（2021 年　福島大）

着眼点

$2<\sqrt{7}<3$ であるから，$\alpha=\sqrt{7}-2$ であるが，このまま $f(\alpha)$ を計算するのは大変である。

このようなときは α がみたす関係式を導き，工夫して計算していきたい。「**解答**」では，整式の割り算を用いた方法を紹介しよう。直接代入して計算する方法と比較して，この方法のよさを実感してもらいたい。

解　答

$2<\sqrt{7}<3$ であるから，$\alpha=\sqrt{7}-2$ である。

$$\alpha+2=\sqrt{7}$$

両辺を 2 乗して

$$\alpha^2+4\alpha+4=7$$

$$\therefore\quad \alpha^2+4\alpha-3=0 \quad\cdots\cdots\cdots ①$$

である。ここで，整式 $f(x)=x^4+5x^3-x^2-x+2$ を x^2+4x-3 で割ると

$$f(x)=(x^2+4x-3)(x^2+x-2)+10x-4$$

であるから $x=\alpha$ を代入して，①より

$$f(\alpha)=10(\sqrt{7}-2)-4=\mathbf{10\sqrt{7}-24}\quad \boxed{答}$$

である。

◀ $\sqrt{7}$ の整数部分は 2 であるということ。

◀ この関係式の利用の仕方がポイント。

◀ $\alpha^2+4\alpha-3=0$ であるから，結局，$10x-4$ に $x=\alpha$ を代入すればよい。

解　説

1 別解 **次数下げを積極的に利用する**

「**解答**」では，$f(x)$ を x^2+4x-3 で割り，$\alpha^2+4\alpha-3=0$ であることから，$x=\alpha$ のときの余りを計算して答えを導いた。このように整式の割り算を用いて，整式 $f(x)$ を変形することによ

り，$f(\alpha)$ の導出について，本来であれば「4 次式に代入して計算する」ところを，結果的に「1 次式に代入して計算する」ことでラクにしているのである。このような方法を「次数下げ」ということがある。

一方で，次のように①を繰り返し利用する方法も考えられる。

①より

$$\alpha^2 = -4\alpha + 3 \quad \cdots\cdots ②$$

両辺に α をかけて，②を用いて

$$\begin{aligned}\alpha^3 &= -4\alpha^2 + 3\alpha \\ &= -4(-4\alpha + 3) + 3\alpha = 19\alpha - 12\end{aligned}$$

$\alpha^3 = 19\alpha - 12$ の両辺に α をかけて，②を用いて

$$\begin{aligned}\alpha^4 &= 19\alpha^2 - 12\alpha \\ &= 19(-4\alpha + 3) - 12\alpha = -88\alpha + 57\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}f(\alpha) &= (-88\alpha + 57) + 5(19\alpha - 12) - (-4\alpha + 3) - \alpha + 2 \\ &= 10\alpha - 4 \\ &= 10(\sqrt{7} - 2) - 4 = 10\sqrt{7} - 24 \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

2 補足 解と係数の関係から眺める

「**解答**」では，次数下げに用いる，α がみたす条件式 $\alpha^2 + 4\alpha - 3 = 0$ を $\alpha = \sqrt{7} - 2$ から導いた。

一方で，α を解の 1 つにもつ 2 次方程式を考えることで導くこともできる。

$\beta = -\sqrt{7} - 2$ とし，α，β を解にもつ 2 次方程式は，解と係数の関係より

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$\therefore \quad x^2 + 4x - 3 = 0$$

α はこの 2 次方程式の解だから

$$\alpha^2 + 4\alpha - 3 = 0$$

を得る。

§2. 3 次方程式

この節では，文字定数を含む 3 次方程式が与えられた解をもつような条件を考察する問題を扱う。入試において，「式と証明」の範疇で問われるポイントとなるところは

・共役複素数解の扱い
・複素数の扱い
・解と係数の関係

であるが，3 次方程式を考察する手段は「式と証明」だけに留まらないことにも注意しよう。具体的には，実数解の考察に，3 次関数のグラフを利用して視覚的に考えることが効果的なこともあり，「微分法」も選択肢のひとつである。

入試問題 2　レベル B

3 次方程式

$$x^3+ax^2+b=0 \quad \cdots\cdots ①$$

について，以下の問いに答えよ。ただし，a，b は実数とする。

(1)　①が複素数 $1+\sqrt{2}i$ を解にもつとき，a，b の値を求めよ。

(2)　①が 1 を解にもち，かつ①が 2 重解をもつとき，a，b の値の組をすべて求めよ。

(3)　①が異なる 3 つの実数解をもつための条件を a，b を用いて表し，この条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。　（2021 年　大阪府立大）

着眼点

この問題を解く際に前提となる知識は，n 次方程式は実数解と虚数解を，重解を含めて合計 n 個もつ（「代数学の基本定理」という）ことであり，本問の場合，解は 3 個ということである。

(1)　実数係数の方程式が虚数解 α をもつとき，その共役複素数である $\overline{\alpha}$ も方程式の解となることを利用する（証明については「**解説 3**」を参照すること）。さらに，残り 1 つの解は実数でなければならない。このようにして，3 つの解の特徴を定めることができるため，解と係数の関係を利用できないか考えてみよう。

(2)　まず，$x=1$ を解にもつが，それが 2 重解とは限らないことに注意しよう。すなわち，1 が 2 重解であるときと，1 以外が 2 重解である場合に分けなければならない。この場合にも(1)と同様に 3 つの解の特徴を定めることができるから，解と係数の関係を利用できないかを考えてみよう。

(3)　今度は解について設定してみても，文字が多くなり処理が困難になってしまう。そこで，方程式が実数解をもつことを，グラフでは x 軸との交点をもつことと読み替える発想の転換をしてみよう。さらに，a と b を同時に変化させると，グラフの動きが複雑になるため，グラフをかきやすくする工夫も大事である。ここではその考え方もおさえるようにしよう。

解　答

(1)　実数係数の方程式①が $x=1+\sqrt{2}i$ を解にもつとき，その共役複素数 $x=1-\sqrt{2}i$ も①の解である。

r を実数とし，残りの解を $x=r$ とすると，解と係数の関係を用いて

$$(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)+r=-a$$
$$(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)r+r(1+\sqrt{2}i)=0$$
$$(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)r=-b$$

整理して

$$2+r=-a \quad \cdots\cdots ②$$
$$3+2r=0 \quad \cdots\cdots ③$$
$$3r=-b \quad \cdots\cdots ④$$

③より $r=-\dfrac{3}{2}$ で，これを②，④に代入すると

$$\boldsymbol{a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{9}{2}}$$ 答

である。

◀共役複素数を解にもつことを示すには，方程式の係数が実数であることを述べなければならない。

◀3 次方程式

$ax^3+bx^2+cx+d=0$

が α，β，γ を解にもつとき，解と係数の関係

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$
$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

が成り立つ。

(2)　$x=1$ を 2 重解にもつとき，残りの解を k とおくと，解と係数の関係を用いて

$$1+1+k=-a$$
$$1\cdot 1+1\cdot k+k\cdot 1=0$$
$$1\cdot 1\cdot k=-b$$

整理して

$$2+k=-a$$
$$2k+1=0$$
$$k=-b$$

したがって，$k=-\dfrac{1}{2}$，$a=-\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$ である。

$x=k\ (k\neq 1)$ を 2 重解にもつとき，解と係数の関係を用いて

$$1+k+k=-a$$
$$1\cdot k+k^2+k\cdot 1=0$$
$$1\cdot k^2=-b$$

整理して

$$2k+1=-a$$
$$k^2+2k=0$$
$$k^2=-b$$

第 2 式より

$$k(k+2)=0 \qquad \therefore\ k=-2,\ 0$$

◀いずれも $k\neq 1$ をみたす。

であるから，第 1 式，第 3 式より

$k=-2$ のとき $a=3$，$b=-4$

$k=0$ のとき $a=-1$，$b=0$

である。

以上より

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right),\ (\mathbf{3},\ \mathbf{-4}),\ (\mathbf{-1},\ \mathbf{0})$$ 答

である。

(3)　$b=-x^3-ax^2$ とし，$f(x)=-x^3-ax^2$ とおく。

曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=b$ が異なる 3 点で交わる条件を求める。

◀定数分離をして考える。なお，$x^3+ax^2=-b$ として $y=x^3+ax^2$ と $y=-b$ が異なる 3 点で交わる条件を考えてもよい。

$$f'(x)=-3x^2-2ax=-x(3x+2a)$$

$a=0$ のときつねに $f'(x)\leqq 0$ であるから，$y=f(x)$ は減少し，$y=b$ と異なる 3 点で交わらない。

$a\neq 0$ のとき，$f'(x)=0$ となるのは $x=0$，$-\dfrac{2}{3}a$ のときである。

◀$a=0$ とそうでないときで $f(x)$ の極値の有無が異なるため場合分けを忘れないこと。

$$f(0)=0,\ f\left(-\frac{2}{3}a\right)=\frac{8}{27}a^3-\frac{4}{9}a^3=-\frac{4}{27}a^3$$

したがって $y=f(x)$ のグラフは，$a<0$ のときに次頁の図 1，$a>0$ のときに次頁の図 2 のようになる。

図 1

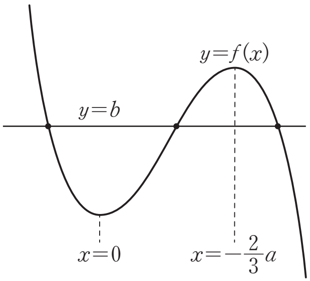
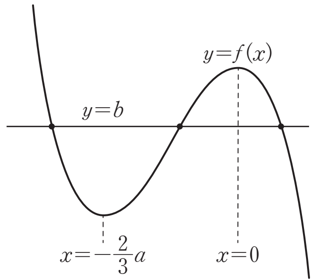


図 2



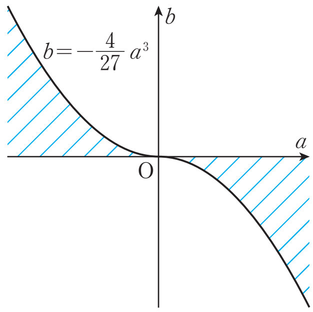
したがって求める条件は

$$\boldsymbol{a<0,\ 0<b<-\frac{4}{27}a^3}$$

または

$$\boldsymbol{a>0,\ -\frac{4}{27}a^3<b<0}$$

であり，$(a,\ b)$ の存在範囲は，**右の図の斜線部分**である。ただし，**境界は含まない。** 答



解　説

1 別解 **(1)共役複素数解の別の利用法**

「**解答**」と同様に共役複素数を解にもつことを利用して，次のような方法も考えられる。

実数係数の方程式①が $x=1+\sqrt{2}i$ を解にもつとき，その共役複素数 $x=1-\sqrt{2}i$ も①の解である。ここで

$$(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)=2$$
$$(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=3$$

であるから，解と係数の関係を用いて

$$x^2-2x+3=0$$

は $x=1\pm\sqrt{2}i$ を解にもつ。したがって，x^3+ax^2+b は x^2-2x+3 で割り切れる。

そこで，x^3+ax^2+b を実際に x^2-2x+3 で割ると

$$x^3+ax^2+b=(x^2-2x+3)(x+a+2)+(2a+1)x-3a+b-6$$

で余りが $(2a+1)x-3a+b-6$ だから

$$2a+1=0,\ -3a+b-6=0$$
$$\therefore\quad a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{9}{2}\quad (答)$$

である。

2 別解 **(3)定数分離ではない方法**

「文字定数は分離する」ことが定石であるが，$y=x^3+ax^2+b$ のグラフが，x 軸と異なる 3 点で交わると考えることで，次のような方法でも解答できる。

$g(x)=x^3+ax^2+b$ とおく。曲線 $y=g(x)$ が x 軸と異なる 3 点で交わる条件を求める。

$$g'(x)=3x^2+2ax$$

$a=0$ のとき，$g(x)$ は極値をもたないので不適である。

$a\neq 0$ のとき，$g(x)$ は $x=0,\ -\dfrac{2}{3}a$ で極値をもつ。曲線 $y=g(x)$ が x 軸と異なる 3 点で交わ

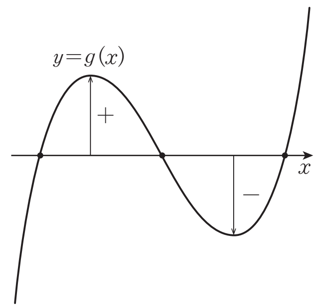
る条件は極値が異符号であること，すなわち

$$g(0)g\left(-\frac{2}{3}a\right)<0$$

$$b\left(-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+b\right)<0$$

$$\therefore\quad b\left(\frac{4}{27}a^3+b\right)<0$$

である。



したがって

$$b<0,\ b>-\frac{4}{27}a^3$$

または

$$b>0,\ b<-\frac{4}{27}a^3$$

であり，これは「**解答**」の結果と一致する。

§3．不等式の証明

不等式の証明はかつては頻出であったが，最近は出題数が落ち着いている。

ただし，それは不等式の証明がメインテーマになる出題が落ち着いた傾向であるということで，誘導問題として組み込まれていたり，問題を解決するために不等式を処理したりしなくてはならないときは多い。

ここでは，その基本となる証明方法を確認する。

たとえば，不等式 $A \geqq B$ を証明する際の原則は，$A-B \geqq 0$ や，（A，B が正のとき）$A^2 \geqq B^2$ などの $A \geqq B$ と同値な式を示すことや，相加・相乗平均の関係などの有名な不等式を利用してみることである。

他にも一度は経験しておかなければならない式変形などもあるため，次の問題でその方法を経験しておこう。

入試問題 3　レベル B

次の問いに答えよ。

(1)　不等式

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geqq 0$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。ただし，a，b，c は実数とする。

(2)　不等式

$$\frac{a^5-a^2}{a^4+b+c} \geqq \frac{a^3-1}{a(a+b+c)}$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。ただし，a，b，c は正の実数とする。

(3)　不等式

$$\frac{a^5-a^2}{a^4+b+c}+\frac{b^5-b^2}{b^4+c+a}+\frac{c^5-c^2}{c^4+a+b} \geqq 0$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。ただし，a，b，c は $abc \geqq 1$ を満たす正の実数とする。　（2020 年　富山大）

着眼点

文字の数が多い場合には，1 文字に注目することが基本であるが，対称式を扱う場合は，対称性を崩さずにすべての文字を対等に扱うと見通しがよいことが多い。

(1)　a，b，c の符号が定められていないので，(左辺)$\geqq 0$ を示すには，左辺を 2 乗（もしくは 2 乗和）の形で表すことを考えればよい。また，左辺が a，b，c の対称式であるから，a，b，c の対称性を崩さないように変形するのもポイントである。

(2)　$A \geqq B$ を示す問題だから，$A \geqq B$ と同値で，より示しやすい式を見つけることから始めよう。いろいろな式の形が考えられるが，両辺ともに扱いにくい分数式であることから，「**解答**」では分母をはらった式

$$(a^5-a^2)\cdot a(a+b+c) \geqq (a^3-1)(a^4+b+c)$$

を示す方針で解く。

(3)　示すべき式の左辺にある

$$\frac{a^5-a^2}{a^4+b+c},\quad \frac{b^5-b^2}{b^4+c+a},\quad \frac{c^5-c^2}{c^4+a+b}$$

を見れば，(2)を利用する方針が思い浮かぶだろう。すなわち，(2)の不等式と，この不等式の $(a,\ b,\ c)$ を $(b,\ c,\ a)$ や $(c,\ a,\ b)$ におき換えた不等式の辺々を足し合わせた

$$\frac{a^5-a^2}{a^4+b+c}+\frac{b^5-b^2}{a+b^4+c}+\frac{c^5-c^2}{a+b+c^4} \geqq \frac{a^3-1}{a(a+b+c)}+\frac{b^3-1}{b(a+b+c)}+\frac{c^3-1}{c(a+b+c)}$$

の右辺が 0 以上であることを示せばよい。

本問の条件式 $abc \geqq 1$ や(1)の不等式が利用できないかも考えながら処理しよう。

解　答

(1)

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geqq 0$$

（証明終）

◀展開して ab, bc, ca が現れる 2 乗の形として $(a\pm b)^2$, $(b\pm c)^2$, $(c\pm a)^2$ が考えられるので，この形が作れるように逆算して係数を調整した。

等号が成立する条件は

$$a-b=b-c=c-a=0$$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=b=c}$ 答

(2) $a^4+b+c>0$, $a(a+b+c)>0$ より

$$\frac{a^5-a^2}{a^4+b+c}\geqq\frac{a^3-1}{a(a+b+c)} \quad\cdots\cdots ①$$
$$\iff (a^5-a^2)\cdot a(a+b+c)\geqq(a^3-1)(a^4+b+c) \quad\cdots ②$$

したがって，②が成立することを示せばよい。

$$(a^5-a^2)\cdot a(a+b+c)-(a^3-1)(a^4+b+c)$$
$$=a^3(a^3-1)(a+b+c)-(a^3-1)(a^4+b+c)$$
$$=(a^3-1)\{a^3(a+b+c)-(a^4+b+c)\}$$
$$=(a^3-1)\{a^3(b+c)-(b+c)\}$$
$$=(a^3-1)^2(b+c)\geqq 0$$

（証明終）

◀b, c は正の実数であるから $b+c>0$ である。

等号が成立する条件は

$a^3-1=0$ 　　$\therefore$ $\boldsymbol{a=1}$ 答

(3) a, b, c は正の実数だから，①を示したのと同様にして

◀(3)の a, b, c は正の実数なので，(2)の不等式が成立する。

$$\frac{b^5-b^2}{b^4+c+a}\geqq\frac{b^3-1}{b(b+c+a)} \quad\cdots\cdots ③$$
$$\frac{c^5-c^2}{c^4+a+b}\geqq\frac{c^3-1}{c(c+a+b)} \quad\cdots\cdots ④$$

が成立する。

①，③，④および $abc\geqq 1$，(1)の不等式より

$$\frac{a^5-a^2}{a^4+b+c}+\frac{b^5-b^2}{a+b^4+c}+\frac{c^5-c^2}{a+b+c^4}$$
$$\geqq\frac{a^3-1}{a(a+b+c)}+\frac{b^3-1}{b(a+b+c)}+\frac{c^3-1}{c(a+b+c)}$$
$$=\frac{bc(a^3-1)+ca(b^3-1)+ab(c^3-1)}{abc(a+b+c)}$$
$$=\frac{abc(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca}{abc(a+b+c)}$$
$$\geqq\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{abc(a+b+c)}$$
$$\geqq 0$$

（証明終）

◀①，③，④の辺々を足し合わせた。

◀分母が 0 より大きいので
　（分子）$\geqq 0$
を示す。

◀$abc\geqq 1$, $a^2+b^2+c^2>0$ より。

◀(1)より。

◀①，③，④，$abc\geqq 1$，(1)の不等式すべての等号が成立する条件である。

等号が成立する条件は

$$a=1,\ b=1,\ c=1,\ abc=1,\ a=b=c$$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=b=c=1}$ 答

解　説

1 補足 (1)(3)対称性を活かして式を変形する

与えられた式の形によるが，一般に対称式を扱う場合は，対称性を崩さず式変形した方がラクに処理できる場合が多い。1 文字だけに注目して，計算が大変になってしまうケースも見られるので，対称式のように式の対称性を活かせる場合は計算を始める前に検討をしてみよう。

対称性を利用する問題として，次の問題を紹介しておく。

(1)　$a^2+b^2+c^2=1$ をみたす複素数 a，b，c に対して，$x=a+b+c$ とおく。このとき，$ab+bc+ca$ を x の 2 次式で表せ。

(2)　$a^2+b^2+c^2=1$，$a^3+b^3+c^3=0$，$abc=3$ をすべてみたす複素数 a，b，c に対して，$x=a+b+c$ とおく。このとき，x^3-3x の値を求めよ。

（2005 年　早稲田大）

【解答】

(1)　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ だから

$$x^2=1+2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore\quad ab+bc+ca=\frac{x^2-1}{2}\quad（答）$$

(2)　$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$ だから

$$x\left(1-\frac{x^2-1}{2}\right)=-9$$

$$\therefore\quad x^3-3x=18\quad（答）$$

2 補足 (3)前問の不等式を利用する

不等式の証明問題では，前問で示した不等式が証明の近道（ヒント）になっていることがある。ただし，前問の不等式をそのまま使うことができるとは限らず

・文字を置き換える
・同じ不等式を繰り返し利用する
・他の不等式と併用する

などに注目して，利用の糸口を見つけなければならない場合が多い。

「**解答**」では，示すべき不等式

$$\frac{a^5-a^2}{a^4+b+c}+\frac{b^5-b^2}{b^4+c+a}+\frac{c^5-c^2}{c^4+a+b}\geqq 0$$

が a，b，c について対称であることから，(2)の不等式の $(a,\ b,\ c)$ を $(b,\ c,\ a)$ や $(c,\ a,\ b)$ のようにずらしておき換え，そうして得られた不等式の辺々を足し合わせるという発想を得た。