

2

問題

次の各問いに答えよ。ただし、 a, b, c, d はすべて正の数である。

- (1) 不等式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ を示し、等号が成立する条件を求めよ。
- (2) 不等式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{16}{a+b+c+d}$ を示し、等号が成立する条件を求めよ。
- (3) $A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, $B = \frac{7}{a+b+c}$ とおくとき、 A, B の大小を比較せよ。

着眼点

- (1) (左辺)-(右辺) ≥ 0 を示せばよい。
- (2) (1)の不等式の左辺の形から (a, b) を (c, d) と置き換えた

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{4}{c+d}$$

を利用することが最初のポイントであり、本問の場合、そこからさらに(1)を利用することを考える。

(1)の不等式に登場する a や b は、正の数という性質だけをもつので、 a を ab や $a+b$, $a+b+c$ などとおいても不等式は成立するので…。

- (3) A, B の形から、(2)の不等式によって大小を比較したいと思えるだろうか。

本問は文字が3種類であるのに対し、(2)は4種類であることから、邪魔な d の扱いがカギとなる。すなわち、 d に a, b, c の式を代入すれば、(2)の不等式の文字を3種類に減らすことができるので、 d に代入する a, b, c の式として、 A, B の大小を比較できるようなものを見つければよい。

解答

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} &= \frac{b(a+b) + a(a+b) - 4ab}{ab(a+b)} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab(a+b)} \\ &= \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

(証明終)

等号が成立する条件は

$$a-b=0 \quad \therefore a=b \quad \text{答}$$

- (2) (1)の結果より

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{4}{c+d}$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d} \geq \frac{4}{a+b+c+d}$$

◀(1)を用いる。

◀ $a \rightarrow a+b$
 $b \rightarrow c+d$
 と対応させている。

となるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} &\geq 4 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d} \right) \\ &\geq 4 \cdot \frac{4}{a+b+c+d} = \frac{16}{a+b+c+d}\end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

等号が成立する条件は

$$a=b \text{ かつ } c=d \text{ かつ } a+b=c+d$$

$$\therefore a=b=c=d \quad \text{答}$$

(3) (2)の不等式において

$$d=a+b+c$$

とおくと

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a+b+c} \\ &\geq \frac{16}{a+b+c+(a+b+c)} \\ &= \frac{8}{a+b+c}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{7}{a+b+c}$$

となる。ここで、等号が成り立つのは

$$a=b=c=a+b+c \quad \therefore a=b=c=0$$

のときであるが、これは a, b, c が正の数であることに矛盾する。

よって、上の不等式における等号は成立しないから

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{7}{a+b+c}$$

$$\therefore A > B \quad \text{答}$$

◀このおき方がポイント。

◀ $A=B$ となることはないことを示す。

解 説

1 別解 (3)相加・相乗平均の関係を用いて

(3)は、相加・相乗平均の関係を用いてもよい。すなわち

$$A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$$

一方

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad \therefore \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{3}{a+b+c}$$

だから

$$A \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{9}{a+b+c} > \frac{7}{a+b+c} = B$$

とすることもできる。

2 別解 (3)(1)の不等式を用いて

(2)の不等式は(1)から成立が示せる不等式なので、(3)の大小関係 $A > B$ は(2)のもととなる(1)を繰り返し用いて示すこともできる。

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{a+b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{a+b} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c} \quad \cdots \cdots \cdots \text{①}$$

ここで、 a, b, c は正の数より $0 < a+b < a+b+c$ だから

$$\frac{3}{a+b} > \frac{3}{a+b+c} \dots\dots\dots ②$$

また, (1)で $a \rightarrow a+b$, $b \rightarrow c$ と対応させると

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{a+b+c} \dots\dots\dots ③$$

したがって①, ②, ③より

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &\geq \frac{3}{a+b} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c} \\ &> \frac{3}{a+b+c} + \frac{4}{a+b+c} = \frac{7}{a+b+c} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{7}{a+b+c}$$