

第1問

解説

〔1〕

- (1)
- $a = -4$
- のとき、関数(ア)は

$$y = |x + 4|$$

と表される。ここで、 $y = 0$ とすると

$$|x + 4| = 0$$

$$\therefore x = -4$$

であるから、関数(ア)のグラフと x 軸との共有点の座標は

$$(-4, 0)$$

である。

⇒ ①

- (2) 一般に、
- $y = |x - a|$
- において、
- $y = 0$
- とすると

$$|x - a| = 0$$

$$\therefore x = a$$

であるから、関数(ア)のグラフと x 軸との共有点 P の座標は

$$P(a, 0)$$

である。また、 $x \geq a$ のとき、関数(ア)は

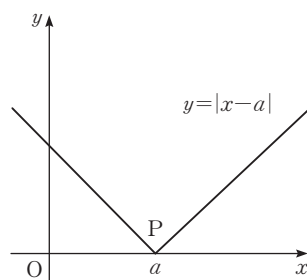
$$y = x - a \quad \cdots \cdots \text{①}$$

と表され、 $x \leq a$ のとき、関数(ア)は

$$y = -(x - a)$$

$$\therefore y = -x + a \quad \cdots \cdots \text{②}$$

と表されるから、そのグラフは右の図のようになる。



よって、 a の値が増加すると、点 P は x 軸上を負から正の方向に移動し、 a の変化にともなって ①、②の x の係数は変化しないから、 a の値を $a = -4$ から増加させると、関数(ア)のグラフは、(1)の図 1 の状態から、 x 軸に平行に負から正の方向に移動する。⇒ ②

- (3)
- $a = 2$
- 、
- $b = -3$
- のとき、関数(イ)は

$$y = 4 - |x + 3|$$

と表される。

ここで、 $x \geq -3$ のとき

$$y = 4 - (x + 3)$$

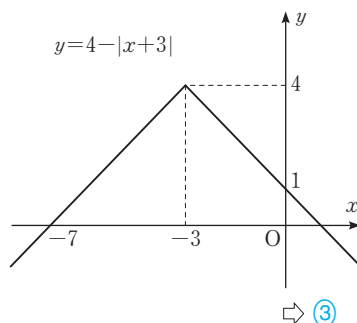
$$\therefore y = -x + 1$$

と表され、 $x \leq -3$ のとき

$$y = 4 + (x + 3)$$

$$\therefore y = x + 7$$

と表されるから、 $a = 2$ 、 $b = -3$ のとき、関数(イ)のグラフは右の図のようになる。



⇒ ③

◀ 実数 A に対して、 $|A| = 0$ であるならば
 $A = 0$
 である。

◀ できなかったらココを復習！

(1)では $a = -4$ の場合を考えたが、ここでは、一般の a のままで考察する。「考え方 1」も参照しよう。

◀ $A \geq 0$ のとき
 $|A| = A$
 である。

◀ $A \leq 0$ のとき
 $|A| = -A$
 である。

◀ 左上の図は、 $a > 0$ の場合の図であるが、他の場合も含めて、関数(ア)のグラフは P で折り返す折れ線であることがポイントである。

◀ $x = -3$ のとき、 $y = 4$ となるから、関数(イ)のグラフは点 $(-3, 4)$ で折り返す折れ線となる。

- (4) 一般に、関数(イ)について、 $x \geq b$ のとき

$$y = 2a - (x - b)$$

$$\therefore y = -x + 2a + b$$

と表され、 $x \leq b$ のとき

$$y = 2a + (x - b)$$

$$\therefore y = x + 2a - b$$

と表されるから、関数(イ)のグラフは右の図のようになる。

したがって、関数(イ)は $x = b$ のとき

最大値 $2a$

をとるから、関数(イ)のグラフ上にあり、 y 座標が最大となるような点 Q の座標は

$Q(b, 2a)$

である。

- (5) (2), (4)より、題意の条件を満たすための必要十分条件は

点 Q が関数(ア)のグラフの上側にある

ことである。すなわち

$$f(x) = |x - a|$$

$$g(x) = 2a - |x - b|$$

とおくと

$$f(b) < g(b)$$

$$\therefore |b - a| < 2a$$

が成り立つことである。したがって、 $a > 0$ であり、そのもとで、絶対値記号をはずして変形すると

$$-2a < b - a < 2a$$

$$\therefore -a < b < 3a \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

を満たせばよい。

したがって、 a と b の値の組(A)～(E)のうちで③を満たす組は

$$(C): a = 4, b = -1$$

$$(D): a = 6, b = 10$$

だけである。

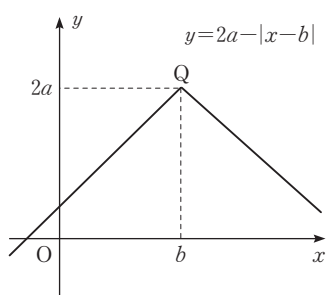
[2]

- (1) $a^2 + 1 > a^2 - 2$ より、 $A = B$ となるためには

$$a^2 + 1 = 1 \text{ または } a^2 + 1 = 2a + 1$$

$$\therefore a = 0 \text{ または } a = 2$$

が必要である。

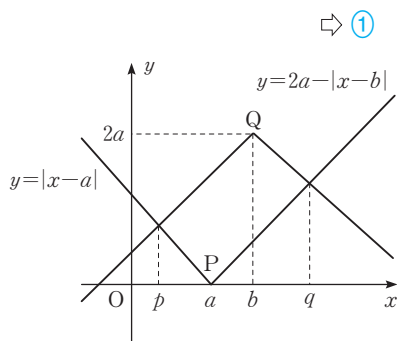


できなかったらココを復習!

(3)の考察を振り返り、一般の a, b のままで考察する。「考え方 1」も参照しよう。

左の図は、 $a > 0, b > 0$ の場合の図であるが、他の場合も含めて

- ・点 Q において、最大となる
- ・Q で折り返す折れ線であることがポイントである。



(2)と(4)のグラフから、このように読み替えるところがポイント。

点 Q の x 座標は b であるから、関数(ア)と(イ)の $x = b$ の値の大小を比較すればよい。

一般に、実数 A, B に対して

$$|A| < B$$

のとき、 $B > 0$ であり

$$-B < A < B$$

が成り立つ。

(A): たとえば $-a < 3a$ を満たさない

(B): $-a < b$ を満たさない

(E): $b < 3a$ を満たさない

できなかったらココを復習!

処理の手間を減らす工夫。

(i) $a = 0$ のとき

$$A = \{0, 1\}, B = \{-2, 1\}$$

となり, $A \neq B$ である。

(ii) $a = 2$ のとき

$$A = \{1, 2, 5\}, B = \{1, 2, 5\}$$

となり, $A = B$ を満たす。

以上より, 求める a の値は $a = 2$ である。

(2) $A \neq B$ かつ $B \subset A$ より, 集合 B の要素の個数は集合 A の要素の個数よりも少ないので

$$2a + 1 = 1 \text{ または } a^2 - 2 = 1 \text{ または } a^2 - 2 = 2a + 1$$

さらに, a は整数であることに注意して

$$a = 0 \text{ または } -1 \text{ または } 3$$

が必要である。

(i) $a = 0$ のときは(1)より不適である。

(ii) $a = -1$ のとき

$$A = \{-1, 1, 2\}, B = \{-1, 1\}$$

となるから, $A \neq B$ かつ $B \subset A$ を満たす。

(iii) $a = 3$ のとき

$$A = \{1, 3, 10\}, B = \{1, 7\}$$

となるから, 不適である。

以上より, 求める a の値は $a = -1$ である。

(3) (2)より, 条件 q が成り立つのは

$$a = -1$$

のときである。このとき, 条件 p も成り立つ。一方, a を -1 以外の負の整数とすると, 条件 p は成り立つが, 条件 q は成り立たない。

したがって, q は p であるための**十分条件であるが, 必要条件でない**。

⇔ ②

[3]

$\sin \angle ABC > 0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} \sin \angle ABC &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

である。

また, $\cos \angle ABC > 0$, $\cos \angle ACB > 0$ であるから, $\angle ABC$, $\angle ACB$ はともに鋭角である。 θ が鋭角の範囲では $\sin \theta$ は単調増加だから, これと

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} &< \frac{3}{4} < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore \sin 45^\circ &< \sin \angle ABC < \sin 60^\circ \\ \frac{1}{2} &< \frac{2}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \therefore \sin 30^\circ &< \sin \angle ACB < \sin 45^\circ \end{aligned}$$

◀ 集合 B の任意の要素は集合 A の要素で, 集合 A の要素で集合 B の要素でないものがあるということ。

◀ $7 \notin A$, $7 \in B$
となるから, $B \subset A$ を満たさない。

を合わせて

$$45^\circ < \angle ABC < 60^\circ, \quad 30^\circ < \angle ACB < 45^\circ$$

である。

⇒ ③

これより

$$75^\circ < \angle ABC + \angle ACB < 105^\circ$$

であるから

$$180^\circ - 105^\circ < \angle CAB < 180^\circ - 75^\circ$$

$$\therefore 75^\circ < \angle CAB < 105^\circ$$

が成り立つ。

したがって

$$\angle ACB < \angle ABC < \angle CAB$$

$$\therefore AB < CA < BC$$

が成り立つ。

⇒ ①

AB = 8 であるから、△ABC について、正弦定理より、二番目に短い辺 CA の長さは

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{CA}{\sin \angle ABC}$$

$$\therefore CA = \frac{8 \cdot \frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = 9$$

となる。

BC が最長辺なので、点 A から直線 BC に垂線 AH を下ろすと、点 H は辺 BC 上にある。

このとき

$$\cos \angle ACB = \sqrt{1 - \sin^2 \angle ACB}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{3}$$

であるから

$$BH = AB \cos \angle ABC = 2\sqrt{7}$$

$$CH = CA \cos \angle ACB = 3\sqrt{5}$$

となる。よって、最も長い辺 BC の長さは

$$BC = BH + CH = 2\sqrt{7} + 3\sqrt{5}$$

である。

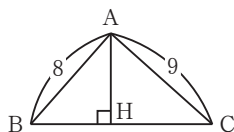
また、△ABC の面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AH$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{7} + 3\sqrt{5}) \cdot AB \sin \angle ABC$$

$$= 6\sqrt{7} + 9\sqrt{5}$$

である。



◀ 辺の長さの大小関係は、それと向かい合う角の大小関係に一致する。

◀ 辺 BC が最長辺、すなわち $\angle CAB$ は最大角であるから、 $\angle ABC$, $\angle BCA$ はいずれも鋭角となる。

考え方

1 補足〔1〕考察の振り返り

本問では、関数(ア)について

(1)で $a = -4$ の具体的な場合を考えた上で、(2)で一般の a のままグラフを考えることが誘導されている。同様に、関数(イ)についても

(3)で $a = 2$, $b = -3$ の具体的な場合を考えた上で、(4), (5)で一般の a , b のままグラフを考えることが誘導されている。

共通テストでは、このように一度考えたことを振り返って、本問のように一般化して考えたり、他の設定の場合を考えたりすることがある。これは、個別試験を含めた数学の演習の中でも、解法の方針を探る際に重要な手法である。糸口がなかなか見つからないとき、誘導されなくとも、必要に応じて

具体的な数値や設定で実験してみる
という試行錯誤は、今後も意識してみてほしい。

2 研究〔1〕平行移動と捉える

「解説」では、関数(ア)と(イ)のいずれについても

絶対値記号の処理の基本に従い、場合分けして絶対値記号をはずすことで、グラフの形状を調べた。この他、以下の平行移動の知識があれば、グラフの図示や状況把握が素早くなるので、紹介しておこう。

関数 $f(x)$ と実数の定数 p , q に対して

$$y = f(x - p) + q$$

のグラフは、 $y = f(x)$ のグラフを x 軸の正の方向に p , y 軸の正の方向に q だけ平行移動したものを表す。

$f(x) = ax^2$ のときは、数学 I でもお馴染みの事実であるが、上記はこれを一般化したものである。これを $f(x) = |x|$ や $f(x) = -|x|$ として用いることにより、以下がわかる。

(ア)のグラフ： $y = |x|$ のグラフを x 軸の正の方向に a だけ平行移動したもの

(イ)のグラフ： $y = -|x|$ のグラフを x 軸の正の方向に b , y 軸の正の方向に $2a$ だけ平行移動したもの

そして、これらに加えて、 $y = |x|$ や $y = -|x|$ のグラフが原点で折り返す折れ線であるから、「解説」のようなグラフを描くことができる。

この他にも、本問は「2次関数」と似た、あるいは関連のある事実が多く含まれている。本問のこの部分が「2次関数」のどこの部分に対応するのか、整理してみることはとても有意義である。

3 補足〔2〕処理の手間を省く工夫

一般に、二つの集合 P , Q が等しいというのは、直観的に言えば

(ア) 異なる要素の個数が等しい

(イ) 集合 P , Q がともに同じ要素で構成される

ということである。とくに、(イ)を数学の表現で表すと

$$P \subset Q \text{ かつ } Q \subset P$$

となる。つまり

集合 P の任意の要素は集合 Q の要素で、

かつ集合 Q の任意の要素は集合 P の要素である

ということである。

〔2〕(1)では、必要条件 $A \subset B$ を考え、集合 A の要素 $a^2 + 1$ と等しい集合 B の要素が存在することから

$$a^2 + 1 = 1, \quad a^2 + 1 = 2a + 1, \quad a^2 + 1 = a^2 - 2$$

の 3 通りの場合分けをすることになる。しかし、「解説」では

$$a^2 + 1 > a^2 - 2$$

となることに着目して、場合分けの手間を軽減している。

試験には制限時間があるので

“処理量を軽減する工夫をして時間を有効に活用する”

ことが得点アップにもつながりやすく、とくに共通テストではこの傾向がさらに強まる。このことは日頃から意識して取り組んでおきたい。