## M1JK　復習シート　6 月度 ①　解答

【1】 $\boxed{\text{証明}}$

1 から 12 までの整数の中で 7 を素因数にもつのは 7 だけである．$a$, $b$ をそれぞれ素因数の積の形で表したとき，題意より，$a$, $b$ のいずれか一方のみが素因数 7 をもつ．したがって，$a$, $b$ の一方は 7 の倍数であり，他方は 7 の倍数ではない．
すなわち，$a \neq b$ である．　　**（証明終）**

【2】 $\boxed{\text{証明}}$

$a = b$ であると仮定すると，
$a^2 > bc$ より，

$$a^2 > ac \quad \cdots ①$$

$ac > b^2$ より，

$$ac > a^2 \quad \cdots ②$$

①，②は矛盾するので，$a \neq b$ である．　　**（証明終）**

【3】 $\boxed{\text{証明}}$

$x^2 + ax + b = 0$ が有理数の解 $\dfrac{m}{n}$ をもつと仮定する（ただし，$m$, $n$ は互いに素な整数で，$n > 0$ とする）と，

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 + a \times \frac{m}{n} + b = 0 \text{ より}, m^2 + amn + bn^2 = 0 \quad \cdots ①$$

ここで，$m$, $n$ は互いに素だから，少なくとも一方が奇数である．

(i) $m$, $n$ がともに奇数のとき
$m^2$, $amn$, $bn^2$ はすべての奇数だから，①に矛盾する．

(ii) $m$ が奇数，$n$ が偶数のとき

$$m^2 + amn + bn^2 = m^2 + n(am + bn)$$

$m^2$ は奇数，$n(am + bn)$ は偶数だから，①に矛盾する．

(iii) $m$ が偶数，$n$ が奇数のとき

$$m^2 + amn + bn^2 = m(m + an) + bn^2$$

$m(m + an)$ は偶数，$bn^2$ は奇数だから①に矛盾する．

以上より，いずれの場合も矛盾する．したがって，$x^2 + ax + b = 0$ は，有理数の解をもたない．　　**（証明終）**

【4】(1) **偽**

反例：$a=1,\ b=2$

(2) **真**

$\boxed{\textbf{証明}}$

対偶「$a$ または $b$ が 7 で割り切れないならば，$a^2+b^2$ は 7 で割り切れない.」をとり，これが真であることを証明する.

ある整数 $m$ を 7 で割ったときの余りと，$m^2$ を 7 で割ったときの余りの関係は，ある自然数 $k$ を用いて

$m=7k$ のとき, $m$ の余り 0, $m^2$の余り 0
$m=7k+1$ のとき, $m$ の余り 1, $m^2$の余り 1
$m=7k+2$ のとき, $m$ の余り 2, $m^2$の余り 4
$m=7k+3$ のとき, $m$ の余り 3, $m^2$の余り 2
$m=7k+4$ のとき, $m$ の余り 4, $m^2$の余り 2
$m=7k+5$ のとき, $m$ の余り 5, $m^2$の余り 4
$m=7k+6$ のとき, $m$ の余り 6, $m^2$の余り 1

ゆえに，$a$ が 7 で割り切れないとき，$a^2$ を 7 で割ったときの余りは，1，2，4 のいずれかであるから，$b^2$ を 7 で割ったときの余りが 1，2，4 のいずれの値をとっても，$a^2+b^2$ を 7 で割ったときの余りは 0 にはなりえない.

したがって，$a$ または $b$ が 7 で割り切れないならば，$a^2+b^2$ は 7 で割り切れない.

よって，この対偶は真であり，もとの命題も真である.　**（証明終）**

**M1JK　復習シート　6 月度③　解答**

【1】(1) 和が 2 になるとき，1 通り
和が 3 になるとき，2 通り
和が 5 になるとき，4 通り
和が 7 になるとき，6 通り
和が 11 になるとき，2 通り
よって，和が素数となるのは

$$1+2+4+6+2=\mathbf{15(通り)}$$

(2) 目の出方は全部で

$$6\times 6=36(通り)$$

そのうち，目の和が 4 以下になるのは

$$1+2+3=6(通り)$$

よって，和が 5 以上になるのは

$$36-6=\mathbf{30(通り)}$$

(3) 出た目の積が奇数になるのは，大小 2 つのサイコロがともに奇数の目が出るときだから

$$3\times 3=9(通り)$$

よって，目の積が偶数になるのは

$$36-9=\mathbf{27(通り)}$$



【2】(1) $7\cdot 7\cdot 6=\mathbf{294(個)}$ できる．
百の位が 1 の数は，$7\cdot 6=42$(個)
百の位が 2 の数も，42 個あるから
小さい方から 100 番目の数は百の位が 3 である．
上 2 桁が 30，31 の数はそれぞれ 6 個ずつあるから，100 番目の数は，**325**

(2) 一の位が 0 であるものは，$7\cdot 6=42$(個)
一の位が 2 であるものは，$6\cdot 6=36$(個)
一の位が 4，6 であるものも 36 個ずつあるから，偶数は全部で，

$$42+3\cdot 36=\mathbf{150(個)}$$

(3) 和が 9 の倍数になる 3 数の組は，

$$(0,\ 2,\ 7),\ (0,\ 3,\ 6),\ (0,\ 4,\ 5),\ (1,\ 2,\ 6),\ (1,\ 3,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4),\ (5,\ 6,\ 7)$$

0 を含む組の 3 数の並べ方は，

$$2\cdot 2\cdot 1=4(通り)$$

0 を含まない組の並べ方は，

$$3!=6(通り)$$

ずつあるから，9 の倍数は全部で，

$$3\cdot 4+4\cdot 6=\mathbf{36(個)}$$

【3】(1) 女子 3 人を 1 人とみて，6 人の並べ方を考えて

$6!$(通り)

また，女子 3 人の並べ方は

$3!$(通り)

積の法則より

$6! \times 3! =$ **4320(通り)**

(2) 両端の男子の並び方は

${}_5\mathrm{P}_2$(通り)

残りの 6 人の並べ方は

$6!$(通り)

積の法則より

${}_5\mathrm{P}_2 \times 6! =$ **14400(通り)**

(3) すべての並び方から，(2) の場合をひけばよい．

$8! - 14400 =$ **25920(通り)**

(4) まず，男子を並べ，次に女子の入り方を考える．

① 男 ② 男 ③ 男 ④ 男 ⑤ 男 ⑥

男子の並べ方は

$5!$(通り)

女子の並べ方は，上の図の ①〜⑥ のうち 3 つを選んで女子を入れればよいから

${}_6\mathrm{P}_3$(通り)

よって，積の法則より

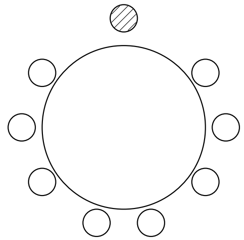
$5! \times {}_6\mathrm{P}_3 =$ **14400(通り)**



【4】(1) $(6-1)! = 5!$

$= $ **120(通り)**

(2) 右の図のように，赤球を置く位置を決めて，他の 8 つの○に白球 2 個，黒球 6 個を一列に並べればよいから



$\dfrac{8!}{2!6!} =$ **28(通り)**

**M1JK　復習シート　6月度④　解答**

【1】(1) ${}_9C_3 \times {}_6C_3 = 84 \times 20$

$= \mathbf{1680}$**(通り)**

(2) (1) で A，B，C の区別がなくなるから

$\dfrac{1680}{3!} = \mathbf{280}$**(通り)**

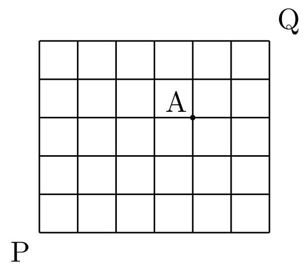
(3) 1 人ずつ A 組か B 組に入れていけばよいので

$2^9 = 512$(通り)

ただし，1 組に全員入る 2 通りを除くので

$512 - 2 = \mathbf{510}$**(通り)**

【2】(1) 右の図において，P から Q まで行く最短経路のうち，A を通らないものと考えると，




${}_{11}C_5 - {}_7C_3 \times {}_4C_2 = \mathbf{252}$**(通り)**

(2) ① ${}_9C_3 \times {}_6C_3 = 84 \times 20$

$= \mathbf{1680}$**(通り)**

② ①で A，B，C の区別がなくなるから

$\dfrac{1680}{3!} = \mathbf{280}$**(通り)**

③ 1 人ずつ A 組か B 組に入れていけばよいので

$2^9 = 512$(通り)

ただし，1 組に全員入る 2 通りを除くので

$512 - 2 = \mathbf{510}$**(通り)**

【3】(1) A〜E から 2 点，F〜I から 1 点選ぶか，または，
A〜E から 1 点，F〜I から 2 点選べばよいので

${}_5C_2 \times {}_4C_1 + {}_5C_1 \times {}_4C_2 = \mathbf{70}$**(個)**

**＜別解＞**
A〜I の中から 3 点選ぶ方法は

${}_9C_3 = 84$(通り)

そのうち，三角形ができないのは，同じ直線上から 3 点とも選ぶ場合だから

${}_5C_3 + {}_4C_3 = 14$(通り)

よって

$84 - 14 = \mathbf{70}$**(個)**

(2) A〜E から 2 点，F〜I から 2 点選べばよいので

$$ {}_5\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = \mathbf{60(個)} $$

(3) 上底，下底が 1cm のとき，$4 \times 3 = 12$(個)
上底，下底が 2cm のとき，$3 \times 2 = 6$(個)
上底，下底が 3cm のとき，$2 \times 1 = 2$(個)
したがって

$$ 12 + 6 + 2 = \mathbf{20(個)} $$

【4】(1) ○を 8 個，｜を 2 個のあわせて 10 個のものを並べる方法と同じだから

$$ \frac{10!}{8!2!} = \mathbf{45(通り)} $$

**＜別解＞**

$$ \begin{aligned} {}_3\mathrm{H}_8 &= {}_{3+8-1}\mathrm{C}_8 \\ &= {}_{10}\mathrm{C}_2 \\ &= \mathbf{45(通り)} \end{aligned} $$

(2) 4 ○｜○○○○｜○｜○○ 1 なら，

$$ a = 4,\ b = c = d = e = 3,\ f = 2,\ g = h = 1 $$

また，4 ○○ || ○○○｜○○○ 1 なら，

$$ a = b = 4,\ c = d = e = 2,\ f = g = h = 1 $$

のように，○を 8 個，|を 3 個のあわせて 11 個を並べることによって，$(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h)$ の組が決まるから

$$ \frac{11!}{8!3!} = \mathbf{165(通り)} $$

**＜別解＞**

$$ \begin{aligned} {}_4\mathrm{H}_8 &= {}_{4+8-1}\mathrm{C}_8 \\ &= {}_{11}\mathrm{C}_3 \\ &= \mathbf{165(通り)} \end{aligned} $$