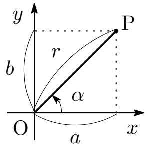
M1JK　復習シート　12月度①　解答

【1】点 P(a, b) に対して，OP $= r$，動径 OP が x 軸正の向きとなす角を α とすると



$$a = \boxed{\boldsymbol{r\cos\alpha}}, \quad b = \boxed{\boldsymbol{r\sin\alpha}} \quad \cdots\cdots ①$$

とおけるので，加法定理より

$$\begin{aligned} a\sin\theta + b\cos\theta &= \boxed{\boldsymbol{r\cos\alpha}}\sin\theta + \boxed{\boldsymbol{r\sin\alpha}}\cos\theta \\ &= r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha \\ &= r\left(\boxed{\boldsymbol{\sin\theta\cos\alpha}} + \boxed{\boldsymbol{\cos\theta\sin\alpha}}\right) \\ &= r\ \boxed{\boldsymbol{\sin(\theta+\alpha)}} \end{aligned}$$

ここで

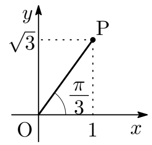
$$r = \boxed{\boldsymbol{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

であるから，① より

$$\sin\alpha = \frac{b}{r} = \boxed{\boldsymbol{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}},$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} = \boxed{\boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}}$$

【2】(1) P$(1, \sqrt{3})$ とすると



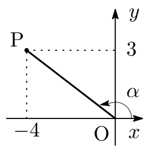
$$\mathrm{OP} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

OP と x 軸の正の向きとのなす角は，$\dfrac{\pi}{3}$

よって

$$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = \boldsymbol{2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)} \qquad \text{(答)}$$

(2) P$(-4, 3)$ とすると



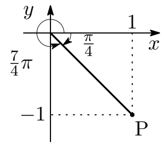
$$\mathrm{OP} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

OP と x 軸の正の向きとのなす角を α とおくと

$$-4\sin\theta + 3\cos\theta = \boldsymbol{5\sin(\theta+\alpha)}$$

$$\left(\textbf{ただし，}\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{3}{5}},\ \boldsymbol{\cos\alpha = -\frac{4}{5}}\right) \qquad \text{(答)}$$

【3】P$(1,\ -1)$ とすると



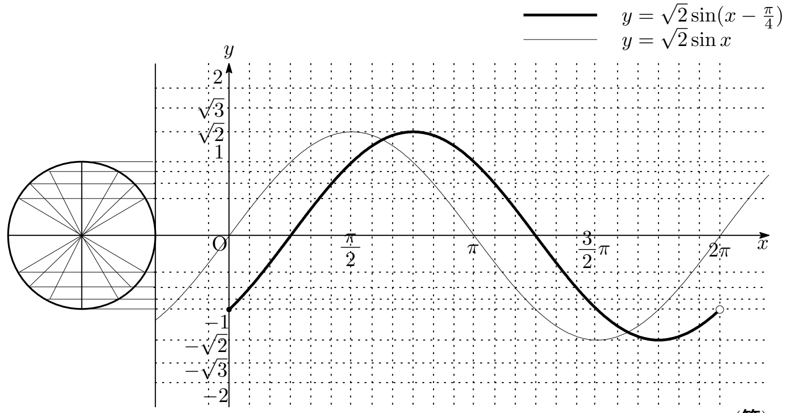
$$\mathrm{OP} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

OP と x 軸の正の向きとのなす角は，$\dfrac{7}{4}\pi$

よって

$$y = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{7}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

したがって，$y = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフは，$y = \sqrt{2}\sin x$ のグラフを x 軸正の方向に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ平行移動したグラフだから，次のようになる．



(答)

【4】(1) 三角関数の合成を考え，

$$-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=1$$
$$\therefore\ 2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=1$$
$$\therefore\ \sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}$$

$\frac{2}{3}\pi \leqq \theta+\frac{2}{3}\pi<\frac{8}{3}\pi$ より

$$\theta+\frac{2}{3}\pi=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$$
$$\therefore\ \boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\pi}$$ **(答)**

(2) 2 倍角の公式より

$$4\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta-2\cos\theta+1=0$$

左辺を因数分解して

$$(2\sin\theta-1)(2\cos\theta-1)=0$$
$$\therefore\ \sin\theta=\frac{1}{2}\quad \text{または}\quad \cos\theta=\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{5}{3}\pi}$$ **(答)**

(3) 半角，2 倍角の公式より

$$4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}-\sin 2\theta+2\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}\leqq 2$$
$$3+\cos 2\theta-\sin 2\theta\leqq 2$$
$$\therefore\ \sin 2\theta-\cos 2\theta\geqq 1$$

さらに，三角関数の合成を用いると

$$\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\geqq 1$$
$$\therefore\ \sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ここで，$0\leqq\theta<\pi$ より，$-\frac{\pi}{4}\leqq 2\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$ であるから

$$\frac{\pi}{4}\leqq 2\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi$$
$$\therefore\ \boldsymbol{\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}}$$ **(答)**

M1JK　復習シート　12 月度 ②　解答

【1】(1)

$$2^3 \times 2^0 \times (2^{-1})^2 = 8 \times 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \mathbf{2} \qquad (\text{答})$$

(2)

$$a^4 \div a^{-2} \times a^0 = a^4 \div \frac{1}{a^2} \times 1$$
$$= \boldsymbol{a^6} \qquad (\text{答})$$

(3)

$$x^2 \div \left(\frac{1}{x}\right)^{-2} = x^2 \div \left(x^{-1}\right)^{-2}$$
$$= x^2 \div x^2$$
$$= \mathbf{1} \qquad (\text{答})$$

(4)

$$36x^{-1}y^2 \div (-2x^3y^{-1})^2 = 36x^{-1}y^2 \div 4x^6y^{-2}$$
$$= \frac{36y^2}{x} \div \frac{4x^6}{y^2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{9y^4}{x^7}} \qquad (\text{答})$$

【2】(1)

$$0.5^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$$
$$0.5^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2$$

したがって，底が 2 (>1) だから

$$2^{-\frac{1}{2}} < 2^{\frac{1}{3}} < 2^2$$

つまり，小さい順に並べると

$$\boldsymbol{0.5^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}, 0.5^{-2}} \qquad (\text{答})$$

(2)

$$\left(\sqrt{3}\right)^{12} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{12} = 3^6 = 729$$
$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^{12} = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^{12} = 7^4 = 2401$$
$$\left(\sqrt[4]{12}\right)^{12} = \left(12^{\frac{1}{4}}\right)^{12} = 12^3 = 1728$$

したがって

$$\left(\sqrt{3}\right)^{12} < \left(\sqrt[4]{12}\right)^{12} < \left(\sqrt[3]{7}\right)^{12}$$

つまり，小さい順に並べると

$$\boldsymbol{\sqrt{3}, \sqrt[4]{12}, \sqrt[3]{7}} \qquad (\text{答})$$

【3】(1) $9^x = \dfrac{1}{27} \iff (3^2)^x = 3^{-3}$

$\iff 3^{2x} = 3^{-3}$

$\iff 2x = -3 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x = -\dfrac{3}{2}}$ 　(答)

(2) $8^x > \dfrac{1}{2} \iff (2^3)^x > 2^{-1}$

$\iff 2^{3x} > 2^{-1}$

$\iff 3x > -1 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x > -\dfrac{1}{3}}$ 　(答)

(3) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x > 8 \iff (2^{-2})^x > 2^3$

$\iff 2^{-2x} > 2^3$

$\iff -2x > 3 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x < -\dfrac{3}{2}}$ 　(答)

(4) $(3^x)^2 - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$

$(3^x)^2 - 4 \cdot 3^1 \cdot 3^x + 27 = 0$

$(3^x)^2 - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

$(3^x - 3)(3^x - 9) = 0$

$\therefore\ 3^x = 3,\ 3^x = 9$

$3^x = 3^1,\ 3^x = 3^2 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x = 1, 2}$ 　(答)

【4】(1) $t = 2^x$ とおくと,

$$\begin{aligned} y &= 2^{2x+2} - 2^{x+2} + 2 \\ &= 2^2 \cdot (2^x)^2 - 2^2 \cdot 2^x + 2 \\ &= 4 \cdot (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 2 \\ &= 4t^2 - 4t + 2 \end{aligned}$$

であるから,

$\boldsymbol{y = 4t^2 - 4t + 2}$ 　(答)

(2) $t = 2^x > 0$ より，$y = 4t^2 - 4t + 2\ (t > 0)$ の最小値を求めればよい.

$$y = 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

よって，$t = \dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 1 をとる.

ここで，$t = \dfrac{1}{2}$ のとき，$2^x = \dfrac{1}{2}$ より，$x = -1$

以上より,

最小値 1 　($x = -1$ のとき) 　(答)

M1JK　復習シート　12 月度 ③　解答

【1】(1) $\log_6 3 + \log_6 2 = \log_6 (3 \cdot 2) = \log_6 6 = \mathbf{1}$　　(答)

(2) $\log_2 20 - \log_2 5 = \log_2 \dfrac{20}{5} = \log_2 4 = \log_2 2^2 = \mathbf{2}$　　(答)

(3)
$$\begin{aligned}
&\log_5 \sqrt{3} + \frac{1}{2}\log_5 \frac{25}{18} - \log_5 \frac{1}{\sqrt{6}} \\
=&\log_5 \sqrt{3} + \log_5 \sqrt{\frac{25}{18}} - \log_5 \frac{1}{\sqrt{6}} \\
=&\log_5 \sqrt{3} \cdot \frac{5}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6} \\
=&\log_5 5 = \mathbf{1} \quad \textbf{(答)}
\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}
\log_2 3 \cdot \log_3 8 &= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 3} \\
&= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 3} \\
&= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{3\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \\
&= \mathbf{3} \quad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【別解】
$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ を用いると
$\log_2 3 \cdot \log_3 8 = \log_2 8 = \log_2 2^3 = \mathbf{3}$　　(答)

(5)
$$\begin{aligned}
&(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2) \\
=&\left(\log_2 3 + \frac{\log_2 9}{\log_2 4}\right)\left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2}{\log_2 9}\right) \\
=&\left(\log_2 3 + \frac{2\log_2 3}{2}\right)\left(\frac{2}{\log_2 3} + \frac{1}{2\log_2 3}\right) \\
=&2\log_2 3 \cdot \frac{5}{2\log_2 3} \\
=&\mathbf{5} \quad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【2】(1) 底が $(0 <)0.5(< 1)$ であるから，対数の大小は真数の大小の逆になる．
したがって，

$$\mathbf{\log_{0.5} 5 < \log_{0.5} 3 < \log_{0.5} 0.2} \quad \text{(答)}$$

(2)

$$\frac{3}{2} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \log_3 3\sqrt{3}$$

ここで，$16 < 27$ より，$4 < 3\sqrt{3}$
底が $3(> 1)$ であるから，対数の大小は真数の大小と一致する．
よって

$$\log_3 4 < \log_3 3\sqrt{3} \qquad \therefore\ \log_3 4 < \frac{3}{2}$$

また，

$$\frac{3}{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \log_2 2\sqrt{2}$$

ここで，$8 < 9$ より，$2\sqrt{2} < 3$
底が $2(> 1)$ であるから，対数の大小は真数の大小と一致する．
よって

$$\log_2 2\sqrt{2} < \log_2 3 \qquad \therefore\ \frac{3}{2} < \log_2 3$$

以上から

$$\mathbf{\log_3 4 < \frac{3}{2} < \log_2 3} \quad \text{(答)}$$

(3) $1 < a < b$ で，底を a とする対数をとると

$$0 < 1 < \log_a b \qquad \therefore\ \log_a b - 1 > 0 \quad \cdots①$$

いま

$$\log_a x - \log_b x = \log_a x - \frac{\log_a x}{\log_a b} = (\log_a x) \cdot \frac{\log_a b - 1}{\log_a b} \quad \cdots②$$

① より

$$\frac{\log_a b - 1}{\log_a b} > 0$$

であるから，$\log_a x$ の正，0，負に応じて，② も正，0，負となる．
したがって，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x > 1} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{\log_a x > \log_b x} \\ \boldsymbol{x = 1} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{\log_a x = \log_b x} \\ \boldsymbol{0 < x < 1} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{\log_a x < \log_b x} \end{cases} \quad \text{(答)}$$

【3】(1) 真数条件より

$$\begin{cases} 1-4x>0 \\ 1+x>0 \\ 5x+4>0 \end{cases} \qquad \therefore\ -\frac{4}{5}<x<\frac{1}{4} \quad \cdots ①$$

このもとで

$$\begin{aligned} \log_2(1-4x)+\log_2(1+x) &= 2\log_4(5x+4) \\ \log_2(1-4x)(1+x) &= 2\cdot\frac{\log_2(5x+4)}{\log_2 4} \\ \log_2(1-3x-4x^2) &= 2\cdot\frac{\log_2(5x+4)}{2} \\ \log_2(1-3x-4x^2) &= \log_2(5x+4) \\ \therefore\ 1-3x-4x^2 &= 5x+4 \\ 4x^2+8x+3 &= 0 \\ (2x+1)(2x+3) &= 0 \qquad \therefore\ x=-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

① を考慮して

$$\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 真数条件より

$$\begin{cases} x^2-x+1>0 & \cdots ① \\ x+4>0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

これは，すべての実数 x について成立する．
② より，

$$x+4>0 \qquad \therefore\ x>-4 \ \cdots (*)$$

以上より，

$$\therefore\ x>-4$$

このもとで，$0<a<1$ より

$$\begin{aligned} x^2-x+1 &> x+4 \\ x^2-2x-3 &> 0 \\ (x+1)(x-3) &> 0 \qquad \therefore\ x<-1,\ 3<x \end{aligned}$$

$(*)$ を考慮し，

$$\boldsymbol{-4<x<-1,\ 3<x} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $\log_{10}3^{80}=80\log_{10}3=80\times 0.4771=38.168$

したがって

$$38<\log_{10}3^{80}<39$$

だから

$$\begin{aligned} &\log_{10}10^{38}<\log_{10}3^{80}<\log_{10}10^{39} \\ &\therefore\ 10^{38}<3^{80}<10^{39} \end{aligned}$$

これより，3^{80} は **39 桁** の数である． (答)

(2)

$$\begin{aligned} \log_{10}\left(\frac{2}{9}\right)^{100} &= 100\log_{10}\frac{2}{3^2}=100(\log_{10}2-2\log_{10}3) \\ &= 100\times(0.3010-2\times 0.4771) \\ &= -65.32 \end{aligned}$$

$$\therefore\ -66<\log_{10}\left(\frac{2}{9}\right)^{100}<-65$$

したがって

$$\begin{aligned} &\log_{10}10^{-66}<\log_{10}\left(\frac{2}{9}\right)^{100}<\log_{10}10^{-65} \\ &\therefore\ 10^{-66}<\left(\frac{2}{9}\right)^{100}<10^{-65} \end{aligned}$$

これより，$\left(\frac{2}{9}\right)^{100}$ は

小数第 66 位 (答)

にはじめて 0 でない数が現れる．