M1JK　復習シート　3 月度 ①　解答

【1】(1)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}$$

$$=\boldsymbol{\frac{n}{3(n+3)}}\qquad\text{(答)}$$

(2)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}}\qquad\text{(答)}$$

【2】もとの数列を $\{a_n\}$，その階差数列を $\{b_n\}$ とする．

(1) $\{b_n\}$ は 1，3，5，7，9，$\cdots$ より，初項 1，公差 2 の等差数列となり

$$b_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$

$$=1+2\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1=1+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}-(n-1)$$

$$=n^2-2n+2$$

$n=1$ のとき，$1^2-2\cdot 1+2=1=a_1$ より，適する．

以上より，$a_n=\boldsymbol{n^2-2n+2}$　**(答)**

(2) $\{b_n\}$ は1，-2，4，-8，16，$\cdots$ より，初項1，公比 -2 の等比数列となり

$$b_n = 1 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^{n-1}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (-2)^{k-1} \\ &= 2 + \frac{1 \cdot \{1-(-2)^{n-1}\}}{1-(-2)} = 2 + \frac{1-(-2)^{n-1}}{3} \\ &= \frac{7-(-2)^{n-1}}{3} \end{aligned}$$

$n=1$ のとき，$\dfrac{7-(-2)^0}{3} = 2 = a_1$ より，適する．

以上より，$a_n = \boldsymbol{\dfrac{7-(-2)^{n-1}}{3}}$　**(答)**

(3) $\{b_n\}$ は1，4，9，16，25，$\cdots$ より，$\{b_n\}$ の一般項は，$b_n = n^2$ であるので，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = -3 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= -3 + \frac{1}{6}(n-1) \cdot n \cdot (2n-1) \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n - 18) \end{aligned}$$

$n=1$ のとき，$\dfrac{1}{6}(2-3+1-18) = -3 = a_1$ より，適する．

以上より，$a_n = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n - 18)}$　**(答)**

【3】(1) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 - 2n) - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\} = 2n - 3$$

$n=1$ のとき，$2 \cdot 1 - 3 = -1$ で，$a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$ と一致し，適する．
よって，$a_n = \boldsymbol{2n-3}$　**(答)**

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (3^n + 1) - (3^{n-1} + 1) = 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$n=1$ のとき，$2 \cdot 3^0 = 2$ で，$a_1 = S_1 = 3^1 + 1 = 4$ より，適さない．
よって，$\boldsymbol{a_1 = 4}$，$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^{n-1}\ (n \geqq 2)}$　**(答)**

【4】$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$，$\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とする．

$\{b_n\}$：　$2, 3, 5, 9, 17$
$\{c_n\}$：　$1, 2, 4, 8, 16$

であり，$\{c_n\}$ は，初項 1，公比 2 の等比数列だから

$$c_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \\ &= 2 + \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n-1} + 1 \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき，$2^0 + 1 = 2$ より，$b_1 = 2$ に適する．　　$\therefore\ b_n = 2^{n-1} + 1$
さらに，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k-1} + 1) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ &= 1 + \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} + (n - 1) = 2^{n-1} + n - 1 \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき，$2^0 + 1 - 1 = 1$ より，$a_1 = 1$ に適する．

$\therefore\ a_n = \boldsymbol{2^{n-1} + n - 1}$　　**(答)**

M1JK　復習シート　3 月度 ②　解答

【1】(1) $\{a_n\}$ は，初項 1，公差 5 の等差数列だから

$$a_n = 1 + (n-1)\cdot 5 = \boldsymbol{5n-4} \qquad (\textbf{答})$$

(2) $\{a_n\}$ は，初項 -1，公比 2 の等比数列だから

$$a_n = -1\cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{-2^{n-1}} \qquad (\textbf{答})$$

(3) $a_{n+1} = a_n + 2n$ より，$a_{n+1} - a_n = 2n$
よって，$\{a_n\}$ の階差数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ が，

$$a_{n+1} - a_n = 2n$$

であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= 1 + 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n = n^2 - n + 1 \end{aligned}$$

これは，$n = 1$ のとき，$1^2 - 1 + 1 = 1 = a_1$ より，$n = 1$ のときも成り立つ.
したがって，

$$a_n = \boldsymbol{n^2 - n + 1} \qquad (\textbf{答})$$

【2】(1) $a_{n+1} = 3a_n - 4$ より，$a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$ をみたす α を求めると，
$\alpha = 2$ であるから，

$$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$$

これより，$\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = 3 - 2 = 1$，公比 3 の等比数列だから

$$a_n - 2 = 1\cdot 3^{n-1} \qquad \therefore\ a_n = \boldsymbol{3^{n-1} + 2} \qquad (\textbf{答})$$

(2) $a_{n+1} - 2a_n = 1$ より，$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$ をみたす α を求めると，
$\alpha = -1$ であるから，

$$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

これより，$\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 4 + 1 = 5$，公比 2 の等比数列だから

$$a_n + 1 = 5\cdot 2^{n-1} \qquad \therefore\ a_n = \boldsymbol{5\cdot 2^{n-1} - 1} \qquad (\textbf{答})$$

【3】(1) $a_{n+1}-a_n=2^n$ より，$n \geqq 2$ において

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + 2 \cdot \frac{2^{n-1}-1}{2-1} = 2^n - 1$$

$a_1 = 1$ とあわせて，$\boldsymbol{a_n = 2^n - 1}$　　**(答)**

(2) $a_{n+1} = -a_n + 2^n$ の辺々を 2^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$$

ここで $b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，$b_1 = \dfrac{a_1}{2} = \dfrac{1}{2}$ であり

$$b_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot b_n + \frac{1}{2}$$
$$b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$$

数列 $\left\{b_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項 $b_1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \therefore \quad b_n = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

よって

$$a_n = 2^n b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3} + \frac{2^n}{3} = \boldsymbol{\frac{2^n - (-1)^n}{3}} \qquad \textbf{(答)}$$

【4】(1) 特性方程式は，$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0$ であり，この解 2 と 3 を用いて，与えられた漸化式を

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$$

と変形すると，これは数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ が，初項 $a_2-2a_1=3-2\cdot 2=-1$，公比 3 の等比数列をなすことを示すから

$$a_{n+1}-2a_n=-1\cdot 3^{n-1} \quad \cdots ①$$

また，漸化式を

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$$

と変形すると，これは数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ が，初項 $a_2-3a_1=3-3\cdot 2=-3$，公比 2 の等比数列をなすことを示すから

$$a_{n+1}-3a_n=-3\cdot 2^{n-1} \quad \cdots ②$$

① − ② より

$$\boldsymbol{a_n=3\cdot 2^{n-1}-3^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 特性方程式は，$x^2-6x+9=(x-3)^2=0$ であり，この重解 3 を用いて，与えられた漸化式を

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$$

と変形すると，これは数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ が，初項 $a_2-3a_1=6-3\cdot 1=3$，公比 3 の等比数列をなすことを示すから

$$a_{n+1}-3a_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$$

両辺を 3^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}$$

これは，$\left\{\dfrac{a_n}{3^n}\right\}$ が初項 $\dfrac{a_1}{3^1}=\dfrac{1}{3}$，公差 $\dfrac{1}{3}$ の等差数列をなすことを示すから

$$\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{1}{3}n$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a_n=n\cdot 3^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

M1JK　復習シート　3 月度③　解答

【1】(1)　(i) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=1\cdot 2=2$$
$$(\text{右辺})=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=2$$

よって，$n=1$ のとき，この等式は成り立つ．

(ii) $n=k\ (\geqq 1)$ のとき，この等式が成り立つと仮定する．すなわち

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}&1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)\\=&\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)\\=&\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

以上，(i)，(ii) より，任意の正の整数 n について

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

が成り立つ．　**[証明終]**

(2)　(i) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=2^1=2$$
$$(\text{右辺})=1$$

よって，$n=1$ のとき，この不等式は成り立つ．

(ii) $n=k\ (\geqq 1)$ のとき，この不等式が成り立つと仮定する．すなわち

$$2^k>k$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}&2\cdot 2^k>2k\\&2^{k+1}>2k=k+k\geqq k+1\quad (k\geqq 1\ \text{より})\\&2^{k+1}>k+1\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

以上，(i)，(ii) より，任意の正の整数 n について，$2^n>n$ が成り立つ．　**[証明終]**

【2】(1) $a_{n+1}=\dfrac{2a_n-1}{a_n}$ において

$n=1$ のとき，$a_2=\dfrac{2a_1-1}{a_1}=\dfrac{2\cdot 2-1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$ (**答**)

$n=2$ のとき，$a_3=\dfrac{2a_2-1}{a_2}=\dfrac{2\cdot\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$ (**答**)

$n=3$ のとき，$a_4=\dfrac{2a_3-1}{a_3}=\dfrac{2\cdot\frac{4}{3}-1}{\frac{4}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}$ (**答**)

$n=4$ のとき，$a_5=\dfrac{2a_4-1}{a_4}=\dfrac{2\cdot\frac{5}{4}-1}{\frac{5}{4}}=\boldsymbol{\dfrac{6}{5}}$ (**答**)

(2) $a_1=\dfrac{2}{1}$ とみると，$a_n=\dfrac{n+1}{n}$ と推定される．

(i) $n=1$ のとき

$$a_1=\frac{1+1}{1}=2$$

よって，$n=1$ のとき，成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，$a_k=\dfrac{k+1}{k}$ が成り立つと仮定すると

$$a_{k+1}=\frac{2a_k-1}{a_k}=\frac{2\cdot\dfrac{k+1}{k}-1}{\dfrac{k+1}{k}}=\frac{k+2}{k+1}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

以上，(i)，(ii) より，任意の正の整数 n について，$a_n=\dfrac{n+1}{n}$ が成り立つ． **[証明終]**

【3】$f(n)=3^{2n}-2^n\quad(n\geqq 1)$ とおく．

(i) $n=1$ のとき
$f(1)=3^2-2^1=7$ であるから，$f(1)$ は 7 の倍数である．
よって，$n=1$ のとき，成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき
$f(k)$ が 7 の倍数であると仮定する．すなわち

$$f(k)=3^{2k}-2^k=7m\quad(m\text{ は整数})$$

とすると

$$f(k+1)=3^{2(k+1)}-2^{k+1}=3^2\cdot 3^{2k}-2\cdot 2^k=7\cdot 3^{2k}+2(3^{2k}-2^k)=7(3^{2k}+2m)$$

ここで，$(3^{2k}+2m)$ は整数より，$f(k+1)$ は 7 の倍数である．
よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

以上，(i)，(ii) より，任意の正の整数 n について，$3^{2n}-2^n$ は 7 の倍数．つまり 7 で割り切れる． **[証明終]**

【4】 (i) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=3^1=3$$
$$(\text{右辺})=1^2=1$$

よって，$n=1$ のとき，この不等式は成り立つ．
$n=2$ のとき

$$(\text{左辺})=3^2=9$$
$$(\text{右辺})=2^2=4$$

よって，$n=2$ のとき，この不等式は成り立つ．

(ii) $n=k\ (\geqq 2)$ のとき，この不等式が成り立つと仮定する．すなわち

$$3^k > k^2 \quad (k \geqq 2)$$

が成り立つと仮定すると，$3^{k+1}=3\cdot 3^k > 3k^2$ を考え

$$\begin{aligned}3^{k+1}-(k+1)^2 &> 3k^2-(k+1)^2\\ &= 2k^2-2k-1\\ &= 2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

これは，$k \geqq 2$ において，単調増加であり，その最小値は

$$k=2\ \text{のとき},\ 2\cdot 2^2-2\cdot 2-1=3>0$$

したがって，$k \geqq 2$ のとき

$$3^{k+1}-(k+1)^2>0 \qquad \therefore\ 3^{k+1}>(k+1)^2$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

以上，(i)，(ii) より，任意の正の整数 n について，$3^n>n^2$ が成り立つ． **[証明終]**