M1JS/M1J

春期講習　確認テスト

解答

Ｚ会東大進学教室

高１選抜東大数学

高１東大数学

【1】 $0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ \quad \cdots\cdots①, \qquad \sin\theta + \cos\theta = \dfrac{4}{3} \quad \cdots\cdots②$

(1) ② の両辺を 2 乗して

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{16}{9}$$

$$\therefore \quad 1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{16}{9}$$

$$\therefore \quad \sin\theta\cos\theta = \boldsymbol{\frac{7}{18}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sin^3\theta + \cos^3\theta &= (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) \\ &= \frac{4}{3}\cdot\left(1 - \frac{7}{18}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{22}{27}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【2】(1)

$$\begin{aligned}2\cos^2\theta + 3\sin\theta = 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2(1 - \sin^2\theta) + 3\sin\theta = 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (\sin\theta - 1)(2\sin\theta - 1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sin\theta = \frac{1}{2},\ \ 1\end{aligned}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから

$\boldsymbol{\theta = 30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ}$ **(答)**

(2)

$$\begin{aligned}2\sin^2\theta - 2\tan\theta \geqq 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2(1 - \cos^2\theta) - 2\tan\theta \geqq 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2\cos^2\theta + 2\tan\theta + 1 \leqq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2}{1 + \tan^2\theta} + 2\tan\theta + 1 \leqq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2 + (1 + \tan^2\theta)(2\tan\theta + 1) \leqq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2\tan^3\theta + \tan^2\theta + 2\tan\theta + 3 \leqq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (\tan\theta + 1)(2\tan^2\theta - \tan\theta + 3) \leqq 0 \quad \cdots①\end{aligned}$$

ここで

$$2\tan^2\theta - \tan\theta + 3 = 2\left(\tan\theta - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} > 0$$

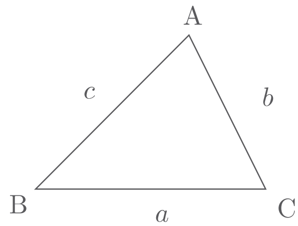
を考慮して

$$① \quad \Longleftrightarrow \quad \tan\theta + 1 \leqq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tan\theta \leqq -1$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから

$\boldsymbol{90^\circ < \theta \leqq 135^\circ}$ (答)

【3】　$\triangle$ABC について，$\angle$A，$\angle$B，$\angle$C の対辺の長さをそれぞれ $a,\ b,\ c$　$(a>0,\ b>0,\ c>0)$ とし，また外接円の半径を $R\ (>0)$ とおく．このとき正弦定理，余弦定理を用いて

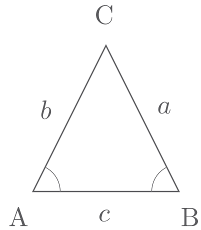


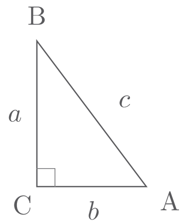
$$
\begin{aligned}
& \sin A\cos A=\sin B\cos B \\
\iff\ & \frac{a}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\
\iff\ & a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2) \\
\iff\ & (a^2-b^2)c^2-(a^4-b^4)=0 \\
\iff\ & (a^2-b^2)\{c^2-(a^2+b^2)\}=0 \\
\iff\ & (a+b)(a-b)\{c^2-(a^2+b^2)\}=0 \\
\iff\ & a=b \quad \text{または} \quad a^2+b^2=c^2
\end{aligned}
$$

よって，$\triangle$ABC は

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\textbf{CB} = \textbf{CA}\ \text{である二等辺三角形} \\
\text{または} \\
\angle\mathrm{C} = \mathbf{90^\circ}\ \text{である直角三角形}
\end{array}
\right.
$$

(答)

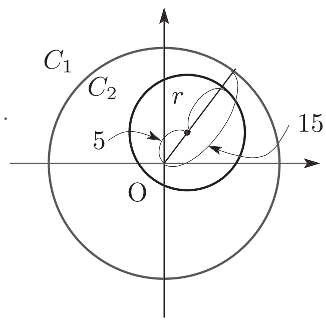




【4】C_1 の中心 $(0,\ 0)$ と C_2 の中心 $(3,\ 4)$ との距離は

$$\sqrt{3^2+4^2}=5$$

これと C_1 の半径 15 と C_2 の半径 r との関係を考える．



(1) C_2 の中心 $(3,\ 4)$ は，C_1 の内部にあるから，

(i) C_2 が C_1 の内部にあるとき

$$5+r<15$$

$$\therefore\quad r<10$$

よって

$$0<r<10$$

(ii) C_1 が C_2 の内部にあるとき

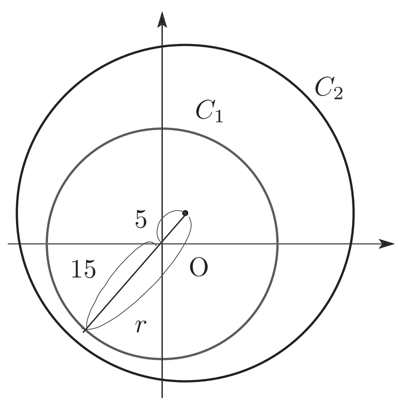
$$5+15<r$$

よって

$$20<r$$

したがって，

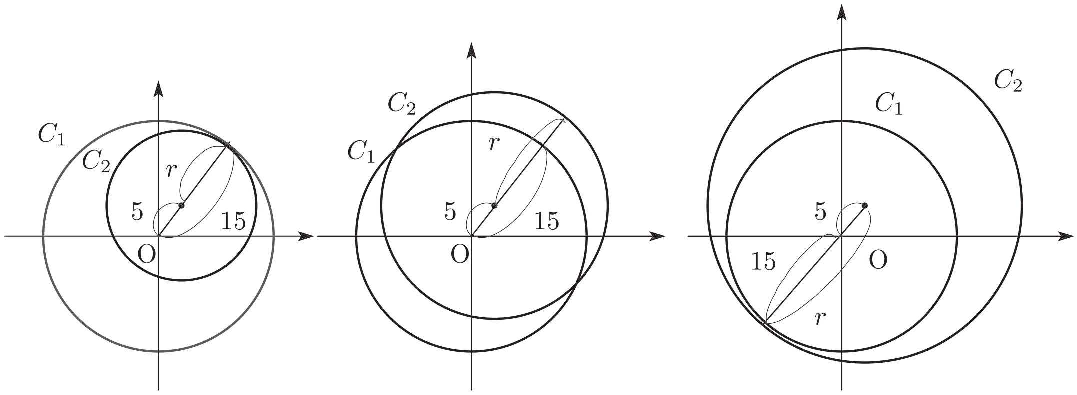
$$\mathbf{0<r<10,\ 20<r}$$



(2) C_2 の半径 r が，C_2 が C_1 に内接するときより大きく，かつ，C_2 が C_1 に内接するときより小さい範囲のときであるから

$$\begin{cases} 5+r>15 \\ 15+5>r \end{cases}$$

$\therefore\ \ \boldsymbol{10<r<20}$　　(答)



【5】与えられた方程式の解を，$y=ax$ と $y=b$ との交点の x 座標として考える．

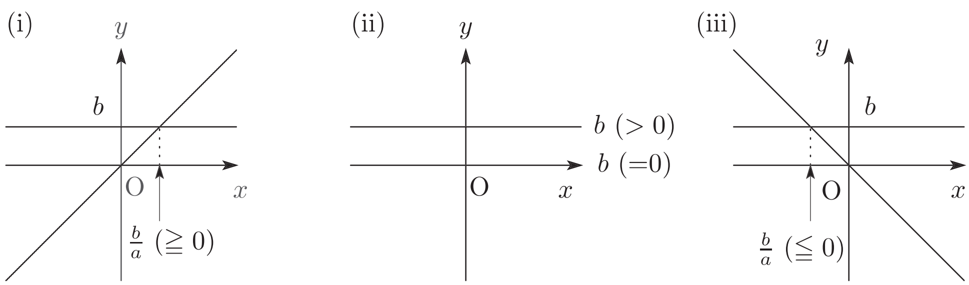
$y=ax$ は

(i) $a>0$ のとき　傾き $a\ (>0)$ の原点を通る直線

(ii) $a=0$ のとき　$y=0$ (x 軸)

(iii) $a<0$ のとき　傾き $a\ (<0)$ の原点を通る直線

それぞれグラフをかくと次のとおり．



(ii) について

$b=0$ のとき，$y=0$ となり一致

$b\fallingdotseq 0$ のとき，$y=b$ とは交わらない

よって

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=\dfrac{b}{a}} & \textbf{(}\boldsymbol{a\fallingdotseq 0}\ \textbf{のとき)} \\ \textbf{任意の数} & \textbf{(}\boldsymbol{a=0}\ \textbf{かつ}\ \boldsymbol{b=0}\textbf{)} \\ \textbf{解なし} & \textbf{(}\boldsymbol{a=0}\ \textbf{かつ}\ \boldsymbol{b>0}\textbf{)} \end{cases}$$　　(答)