P3JR

春期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

物理波動入門

1章　振動と波形

問題

■演習

【1】

《解答》

I　(1) 振幅を A とすると，図 1(または図 2) より，$A = 0.02$[m]
波長を λ とすると，図 1 より，$\lambda = 8$[m]
周期を T とすると，図 2 より，$T = 2$[s]
このときの振動数を f とすると，

$$f = \frac{1}{T} = 0.5[\mathrm{Hz}]$$

波の速さを v とすると，

$$v = f\lambda = 4[\mathrm{m/s}]$$

(2) 波形が図 1 からわずかに右へ移動したとき，$y = 0$ から $y > 0$ となる位置なので，図 2 の振動をするのは位置 B と分かる．

(3) $t = 0$ のとき，位置 C から波の山までの距離は $l = 4 + 8n$ と表せる．よって，位置 C を波の山が通過する時刻は，

$$t = \frac{l}{v} = 1 + 2n \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

II　(1) 振幅を A とすると，図 1(または図 2）より，$A = 0.5$[cm]
波長を λ とすると，図 1 より，$\lambda = 2$[cm]
周期を T とすると，図 2 より，$T = 40$[ms]
このときの振動数を f とすると，

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{40 \times 10^{-3}} = 25[\mathrm{Hz}]$$

(2) 波の速さを v とすると，

$$v = f\lambda = 50[\mathrm{cm/s}]$$

(3) 波形がわずかに移動したとき，$x = 0$ で図 2 のように $y = 0$ から $y > 0$ となることから，図 1 の波形は x 軸の負の方向へ進行していることが分かる．

【2】

《解答》

(1) 波長を λ とすると，$\overline{\mathrm{P_1P_2}} = \dfrac{1}{4}\lambda$ なので，

$$\frac{1}{4}\lambda = L \qquad \therefore \quad \lambda = 4L$$

(2) 波の速さを v とすると，

$$v = f\lambda = 4fL$$

(3) 求める時間を t とすると，

$$t = \frac{L}{v} = \frac{1}{4f}$$

(4) 媒質の速さが最大なのは，振動の中心 $y = 0$ を通過するときなので，$\mathrm{P_2}$ と $\mathrm{P_4}$ である．波形がわずかに右へ移動したとき，$\mathrm{P_2}$ では $y > 0$ となるが $\mathrm{P_4}$ では $y < 0$ となる．よって，媒質の速さが x 軸の正の方向で最大になっている位置は $\mathrm{P_2}$ と分かる．

(5) 媒質が静止するのは振動の端で y が最大または最小になるときなので，媒質が静止している位置は $\mathrm{P_1}$ と $\mathrm{P_3}$ と分かる．

(6) $y > 0$ となっている位置では媒質が右側にずれた状態にあり，$y < 0$ となっている位置では媒質が左側にずれた状態にあるので，媒質の密度が最大になっている位置は $\mathrm{P_2}$ と分かる．

【3】

《解答》

空気の圧力 p を縦軸とする図 2 のグラフを，空気の変位 y を縦軸として描き直すと，図 $2'$ のようになる．ここで，$+x$ 方向の変位を $y>0$，$-x$ 方向の変位を $y<0$ として描いた．

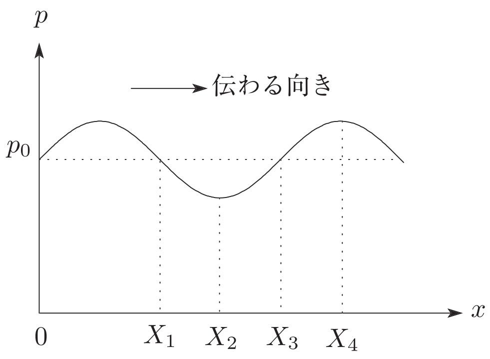


図 2

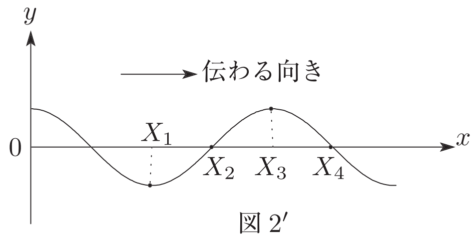


図 $2'$

(1) (ア)+　(イ)−　(ウ)−　(エ)+　(オ)X_1

(2) 図 $2'$ で位置 X_4 に注目することにより，(カ)−　(キ)+

図 $2'$ で位置 X_2 に注目することにより，(ク)+　(ケ)−

図 2 で位置 X_1 に相当しているので，(コ)T_3

【4】

《解答》

(ア) $v = f\lambda$

(イ) $\dfrac{6\lambda}{v} = \dfrac{6}{f}$

(ウ) 偶数

(エ) $\dfrac{\lambda}{2} \cdot 2n = n\lambda$

(オ) $\dfrac{\lambda}{2} \cdot (2n+1) = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\lambda$

(カ) AP−BP$= 2x$ なので，強めあうための条件は，

$$2x = n\lambda \qquad \therefore \quad x = \frac{n\lambda}{2}$$

(キ) C を除く CB 間では $0 < x \leqq \dfrac{2.5\lambda}{2}$ なので，

$$0 < \frac{n\lambda}{2} \leqq 1.25\lambda \qquad \therefore \quad 0 < n \leqq 2.5$$

これを満たす整数は $n = 1, 2$ の 2 個あるので，CB 間にできる腹は 2 個と分かる．

(ク) $\mathrm{BP} - \mathrm{AP} = \sqrt{y^2 + (2.5\lambda)^2} - y$

(ケ) $n = 1$ で弱めあう条件は，

$$\sqrt{y^2 + (2.5\lambda)^2} - y = 1.5\lambda \qquad \therefore \quad \sqrt{y^2 + (2.5\lambda)^2} = y + 1.5\lambda$$

両辺を 2 乗すると，

$$y^2 + (2.5\lambda)^2 = (y + 1.5\lambda)^2 \qquad \therefore \quad y = \frac{4}{3}\lambda$$

【5】

《解答》

(1) $\Delta N=\left|\dfrac{l}{\lambda_1}-\dfrac{l}{\lambda_2}\right|$

(2) 音速 v_1，v_2 を用いると，

$$\Delta N=\left|\frac{l}{v_1/f}-\frac{l}{v_2/f}\right|=fl\left|\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right|$$

f を 0 から大きくしていったとき，最初に弱め合うのは，$\Delta N=\dfrac{1}{2}$ となるときなので，

$$fl\left|\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right|=\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad f=\frac{v_1v_2}{2l|v_2-v_1|}$$

(3) $f=\dfrac{340\times 330}{2\times 3.4\times 10}=1650\mathrm{Hz}$

(4) アルゴンガスの温度が上がって v_2 が大きくなると，B 部に含まれる波の数が単調に減少していく．このとき ΔN も変化していくので，出口 C での音は弱い状態から次第に強くなり，その後は次第に弱くなるという変化を繰り返すことになる．

２章　定常波の特徴

問題

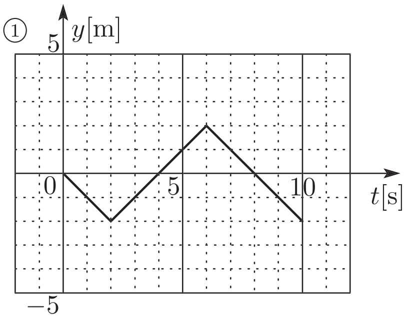
■演習

【1】

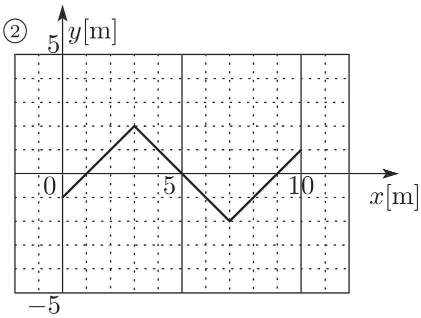
《解答》

(1) $\begin{cases} \lambda = 8[\mathrm{m}] \\ a = 2[\mathrm{m}] \\ T = \dfrac{\lambda}{v} = 8[\mathrm{s}] \end{cases}$

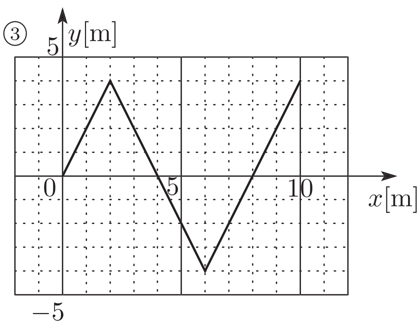
(2) 図 1 の波形をわずかに右へ移動すると，$x = 0$ では $y = 0$ から $y < 0$ となる．よって，$x = 0$ における振動のグラフは右図①のようになる．

①


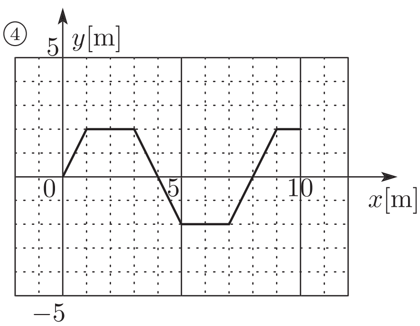
(3) 図 1 の波形が右に 1m 移動するので，$t = 1[\mathrm{s}]$ における波形は，右図②のようになる．

②


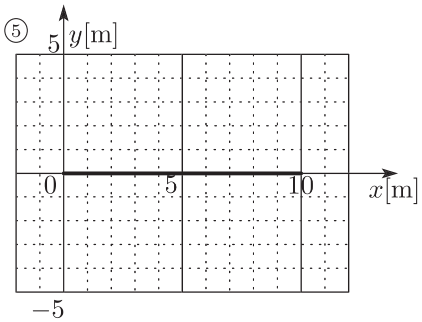
(4) $t = 0$ においては山と山，谷と谷が重なっているから，$t = 0$ における合成波形は右図③のようになる．

③


(5) 図 1 の波形が右に 1m，図 2 の波形が左に 1m 移動する．それらの波形を重ね合わせると，$t = 1$ における合成波形は右図④のようになる．

④


(6) 図 1 の波形が右に 2m，図 2 の波形が左に 2m 移動すると，それらの波形の山と谷が重なるので，$t = 2$ における合成波形は右図⑤のようになる．



(7) 波長，振幅が同じで逆向きに進む 2 つの波が重なったときに生じる波で，移動しないように見え，大きい振幅で振動する部分 (腹) と全く振動しない部分 (節) が等間隔で並んでいる．

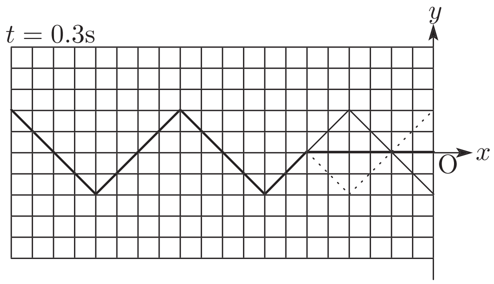
【2】

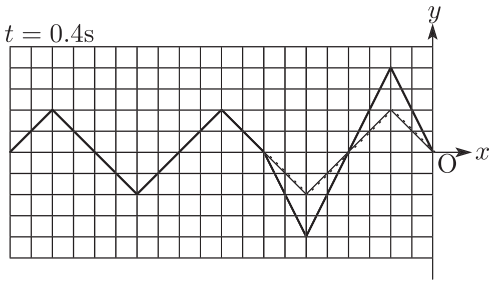
《解答》

(1) 振動数を f，波長を λ，振幅を A，速さを v とすると，

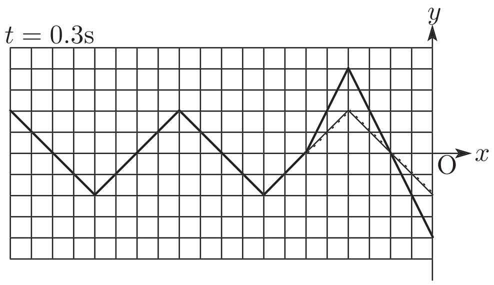
$$\begin{cases} \lambda = 8\text{cm} \\ A = 2\text{cm} \\ v = f\lambda = 20\text{cm/s} \end{cases}$$

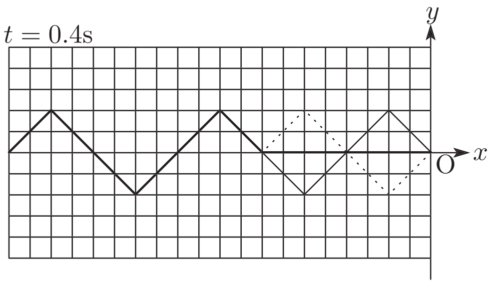
(2) 固定端反射の場合は，反射する際に y の符号が逆転して，上下が反対になった反射波形となる．よって，入射波を実線，反射波を破線，合成波を太線で図示すると下図のようになる．



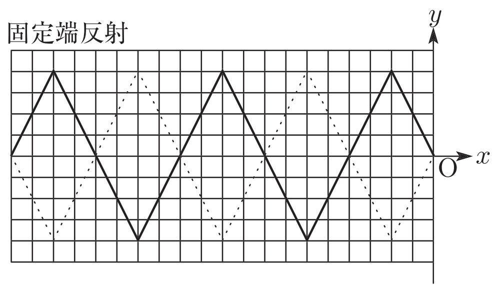


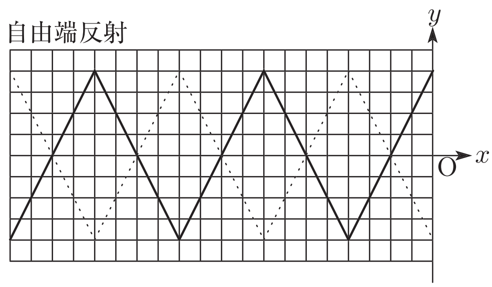
(3) 自由端反射の場合は，進行方向のみが逆転する．よって，入射波を実線，反射波を破線，合成波を太線で図示すると下図のようになる．





(4) いずれも，振幅 0 の節と振幅 $2A = 4\text{cm}$ の腹が等間隔で並んだ定常波となるが，固定端反射の場合は $x = 0$ が節となり，自由端反射の場合は $x = 0$ が腹となる．





【3】

《解答》

(ア) 糸の張力と重力のつりあいより,

$$T = 1.00 \times 9.8 = 9.80[\mathrm{N}]$$

(イ) $[\mathrm{N}]=[\mathrm{kg{\cdot}m/s^2}]$ なので, $\left(\dfrac{T}{\rho}\right)^{\alpha}$ の単位は,

$$\left[\frac{\mathrm{kg \cdot m/s^2}}{\mathrm{kg/m}}\right]^{\alpha} = [\mathrm{m/s}]^{2\alpha} \qquad \therefore \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

(ウ) $v = \sqrt{\dfrac{9.80}{5.00 \times 10^{-4}}} = 1.40 \times 10^2[\mathrm{m/s}]$

(エ) 基本振動のときの波長は $2l$ なので,

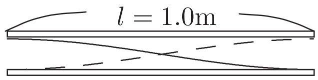
$$v = f_1 \cdot 2l \qquad \therefore \quad f_1 = \frac{v}{2l}$$

(オ) $f_1 = \dfrac{1.40 \times 10^2}{2 \times 0.50} = 1.4 \times 10^2[\mathrm{Hz}]$

(カ) $f_3 = 3f_1 = 4.2 \times 10^2[\mathrm{Hz}]$

【4】

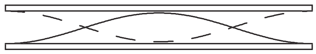
(1) 管の長さを l，音波の速さを v，最初の共鳴で生じる定常波の振動数を f_1 とすると，



最初の共鳴

$$v = f_1 \cdot 2l \qquad \therefore \quad f_1 = \frac{v}{2l} = 1.7 \times 10^2\text{Hz}$$

(2) 2 番目の共鳴で生じる定常波の振動数を f_2 とすると，



2 番目の共鳴

$$v = f_2 \cdot l \qquad \therefore \quad f_2 = \frac{v}{l} = 3.4 \times 10^2\text{Hz}$$

(3) n 番目に共鳴して生じる定常波の波長を λ_n とすると，

$$\frac{\lambda_n}{2} \cdot n = l \qquad \therefore \quad \lambda_n = \frac{2l}{n}$$

対応する振動数を f_n とすると，

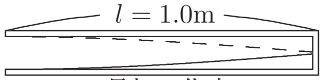
$$v = f_n \cdot \frac{2l}{n} \qquad \therefore \quad f_n = \frac{v}{2l} \cdot n (= f_1 \cdot n)$$

ここで，$0 < f_n \leqq 10000\text{Hz}$

$$0 < 170n \leqq 10000 \qquad \therefore \quad 0 < n \leqq \frac{1000}{17}$$

これを満たす整数は，$n = 1 \sim 58$ なので，共鳴は 58 回起こる．

(4) 最初の共鳴で生じる定常波の振動数を $f_1{}'$ とすると，



最初の共鳴

$$v = f_1{}' \cdot 4l \qquad \therefore \quad f_1{}' = \frac{v}{4l} = 8.5 \times 10^1\text{Hz}$$

(5) 2 番目の共鳴で生じる定常波の振動数を $f_2{}'$ とすると，

2 番目の共鳴

$$v = f_2{}' \cdot \frac{4}{3}l \qquad \therefore \quad f_2{}' = \frac{3v}{4l} \fallingdotseq 2.6 \times 10^2\text{Hz}$$

(6) $f' = 25\text{Hz}$ で最初に共鳴する管の長さを l' とすると，(4) と同様に，

$$f' = \frac{v}{4l'} \qquad \therefore \quad l' = \frac{v}{4f'} = 3.4\text{m}$$

【5】

(1) $L=\dfrac{\lambda}{4}\times(\text{奇数})=\dfrac{\lambda}{4}(2n-1)$

(2) $L=a$ のとき $n=1$ なので，

$$a=\frac{\lambda}{4}\cdot 1 \qquad \therefore \quad \lambda=4a$$

(3) $L=b$ のとき $n=2$ なので，

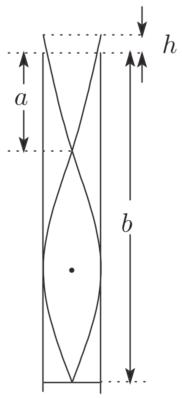
$$b=\frac{\lambda}{4}\cdot 3 \qquad \therefore \quad \lambda=\frac{4}{3}b$$

(4) (2) で a を $a+h$ と置き換えると，

$$a+h=\frac{\lambda}{4}\cdot 1 \qquad \therefore \quad \lambda=4(a+h)$$

(5) (3) で b を $b+h$ と置き換えると，

$$b+h=\frac{\lambda}{4}\cdot 3 \qquad \therefore \quad \lambda=\frac{4}{3}(b+h)$$



(6) 右図より，

$$b-a=\frac{\lambda}{2} \qquad \therefore \quad \lambda=2(b-a)$$

(7) (4)，(5) より，

$$4(a+h)=\frac{4}{3}(b+h) \qquad \therefore \quad h=\frac{b-3a}{2}$$

(8) 空気が大きく振動するのは腹の位置なので，イとホ

(9) 空気がほとんど振動しないのは節の位置なので，ハとト

3章　ドップラー効果

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 図 1 の振動の周期は $T_1 = 1.0 \times 10^{-3}$[s] なので，

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = 1.0 \times 10^3[\mathrm{Hz}]$$

(2) 図 2 より，うなりの周期は $T_0 = 10 \times 10^{-3}$[s] と分かる．1 秒間あたりのうなりの回数を f_0 とすると，

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = 1.0 \times 10^2[回/\mathrm{s}]$$

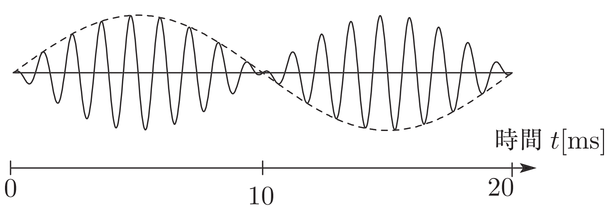
(3) うなりの周期 T_0 の間におんさ A よりもおんさ B の方が 1 回多く振動するので，

$$f_2T_0 - f_1T_0 = 1 \qquad \therefore \quad f_2 - f_1 = f_0$$

(1)，(2) をふまえると，

$$f_2 - 1.0 \times 10^3 = 1.0 \times 10^2 \qquad \therefore \quad f_2 = 1.1 \times 10^3[\mathrm{Hz}]$$

(4) 余弦関数は，振動数 $\dfrac{f_1 + f_2}{2} = 1.05 \times 10^3[\mathrm{Hz}]$ のすばやい変動を表し，これが合成波の音の高さを決めている．正弦関数は，$\dfrac{f_2 - f_1}{2} = 50[\mathrm{Hz}]$ すなわち周期 20[ms] のゆっくりした変動をあらわし，これは下図の破線で示すような，合成振幅の変動に対応していて，これにより音の強弱が決まる．



【2】

《解答》

(ア) $\lambda = \dfrac{V}{f_0}$

(イ) $\lambda' = \dfrac{V - v_\mathrm{S}}{f_0}$

(ウ) $f_1 = \dfrac{V}{\lambda'} = \dfrac{V}{V - v_\mathrm{S}} f_0$

(エ) $V' = V + v_\mathrm{O}$

(オ) $f_2 = \dfrac{V'}{\lambda} = \dfrac{V + v_\mathrm{O}}{V} f_0$

(カ) (オ) の v_O を v_B で置き換えることにより，球が受ける音波の振動数は，

$$f_\mathrm{B} = \frac{V + v_\mathrm{B}}{V} f_0$$

(キ) (ウ) の v_S を v_B，f_0 を f_B で置き換えることにより，

$$f_\mathrm{R} = \frac{V}{V - v_\mathrm{B}} f_\mathrm{B} = \frac{V + v_\mathrm{B}}{V - v_\mathrm{B}} f_0$$

(ク) $v_\mathrm{B} = \dfrac{f_\mathrm{R} - f_0}{f_\mathrm{R} + f_0} V$

【3】

《解答》

(あ) S から出される音の波長を λ とすると，$\lambda=\dfrac{V}{f}$

(い) M からみた相対的な音速を V' とすると，$V'=V+u$

(う) M が聞く直接音の振動数を f_1 とすると，

$$f_1=\frac{V'}{\lambda}=\frac{V+u}{V}f$$

(え) M が聞く反射音の振動数を f_2 とすると，(あ)〜(う) と同様にして，

$$f_2=\frac{V-u}{\lambda}=\frac{V-u}{V}f$$

(お) M が聞く 1 秒間のうなりの回数は，同時に聞く 2 つの振動数の差と等しいので，

$$f_1-f_2=\frac{V+u}{V}f-\frac{V-u}{V}f=\frac{2u}{V}f$$

(か) $\dfrac{\lambda}{2}=\dfrac{V}{2f}$

(き) u

【4】

《解答》

(1) B が波源に $v\cos\theta$ で近づくので，

$$f_1 = \frac{c + v\cos\theta}{c} f$$

(2) 波源となる B が A に向かって $v\cos\theta$ で近づくので，

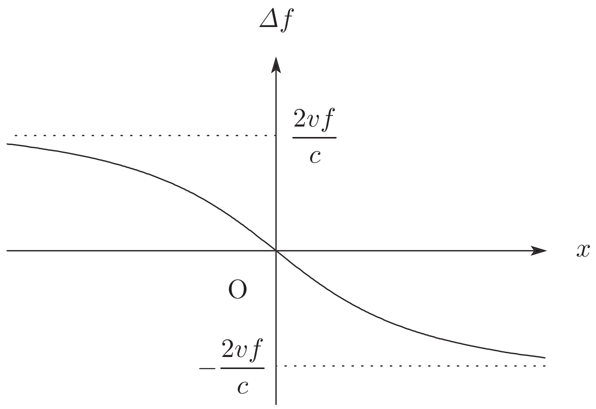
$$f_2 = \frac{c}{c - v\cos\theta} f_1 = \frac{c + v\cos\theta}{c - v\cos\theta} f$$

(3) $\Delta f = \dfrac{2v\cos\theta}{c - v\cos\theta} f$

(4) $c \gg v$ なので，

$$\Delta f \fallingdotseq \frac{2vf}{c}\cos\theta \quad \cdots(*)$$

ここで x 軸の負の側で遠方のときは $\theta = 0°$，x 軸正の側で遠方のときは $\theta = 180°$ となっていることをふまえてグラフを描くと下図のようになる．



(5) $(*)$ より，

$$v = \frac{\Delta f \cdot c}{2f\cos\theta} = 30[\mathrm{m/s}]$$

【5】

《解答》

(1) 超音波を発射した時間 $\varDelta t_0$ の間に超音波の先端が伝わる距離と，この間にコウモリが移動する距離の差より，

$$l = V\varDelta t_0 - v\varDelta t_0 = (V - v)\varDelta t_0$$

(2) ガに対する超音波の相対的な速さは $V - u$ なので，

$$(V-u)\varDelta t_1 = l \qquad \therefore \quad \varDelta t_1 = \frac{l}{V-u} = \frac{V-v}{V-u}\varDelta t_0$$

また，コウモリが出した超音波の波の数はガが受けた超音波の波の数に等しいので，

$$f_1\varDelta t_1 = f_0\varDelta t_0 \qquad \therefore \quad f_1 = \frac{\varDelta t_0}{\varDelta t_1}f_0 = \frac{V-u}{V-v}f_0$$

(3) (a) ガに当たって返ってくる反射波の先端から後端までの長さを l' とすると，(1) と同様に考えて，

$$l' = V\varDelta t_1 + u\varDelta t_1 = (V+u)\varDelta t_1$$

コウモリに対する反射波の相対的な速さは $V + v$ なので，(2) と同様に考えて，

$$(V+v)\varDelta t_2 = l' \qquad \therefore \quad \varDelta t_2 = \frac{l'}{V+v} = \frac{V+u}{V+v}\varDelta t_1$$

これと (2) より，

$$r = \frac{\varDelta t_2}{\varDelta t_0} = \frac{V+u}{V+v}\cdot\frac{\varDelta t_1}{\varDelta t_0} = \frac{(V+u)(V-v)}{(V+v)(V-u)}$$

(b) (2) と同様に，超音波の波の数が等しいことに着目して，

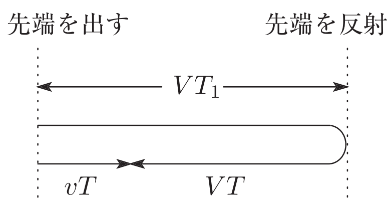
$$f_2\varDelta t_2 = f_0\varDelta t_0 \qquad \therefore \quad s = \frac{f_2}{f_0} = \frac{\varDelta t_0}{\varDelta t_2} = \frac{1}{r}$$

(4) (a) (1) と同様に，時間 T_1 の間に超音波の先端が伝わる距離とコウモリが移動する距離の差より，

$$L_1 = VT_1 - vT_1 \qquad \therefore \quad T_1 = \frac{L_1}{V-v}$$

(b) 時間 T の間に超音波の先端が伝わる距離とコウモリが移動する距離の和は，時間 T_1 の間に超音波の先端が伝わる距離の 2 倍なので，

$$VT + vT = VT_1 \times 2 \qquad \therefore \quad T_1 = \frac{V+v}{2V}T$$



反射されてからの時間 $T - T_1$ の間に，超音波の先端はガから見て相対的な速さ $V + u$ で離れていき，コウモリに届くので，

$$L = (V+u)(T-T_1) = (V+u)\cdot\frac{(V-v)T}{2V}$$

4章　屈折と全反射

問題

■演習

【1】

《解答》

I　$ah^x g^y$ の単位は，

$$[\mathrm{m}]^x \cdot [\mathrm{m/s^2}]^y = [\mathrm{m}^{x+y}/\mathrm{s}^{2y}]$$

これが v の単位 [m/s] と一致するので，

$$\begin{cases} 1 = x + y \\ -1 = -2y \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} (\text{ア})\ x = \dfrac{1}{2} \\ (\text{イ})\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(ウ) 平方根

II (エ) PQ$=v_1 \times t_1$

(オ) BD$=v_1 \times t$

(カ) △APQ と △ABD に注目することにより，

$$\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{AD} - \mathrm{QD}}{\mathrm{AD}}$$

(キ) △ACD と △QRD に注目すると，$\dfrac{\mathrm{QD}}{\mathrm{AD}} = \dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{AC}}$ なので，

$$\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{BD}} = 1 - \frac{\mathrm{QD}}{\mathrm{AD}} = 1 - \frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{AC}}$$

(ク) ∠BAD$=i$，∠ADC$=r$ なので，

$$\begin{cases} \sin i = \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}} \\ \sin r = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}} \end{cases} \qquad \therefore \quad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AC}}$$

(ケ) BD$=v_1 t$，AC$=v_2 t$ なので，

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1 t}{v_2 t} = \frac{v_1}{v_2}$$

(コ) I より，$v_1 = a\sqrt{2hg}$，$v_2 = a\sqrt{hg}$ と表せるので，

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{a\sqrt{2hg}}{a\sqrt{hg}} = \sqrt{2}$$

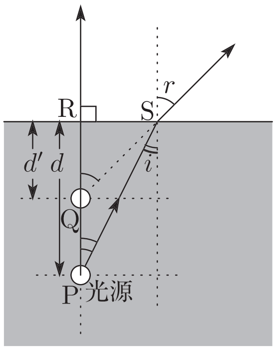
(サ) $i = 45^\circ$ のとき，(コ) より，

$$\sin r = \frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad r = 30^\circ$$

【2】

《解答》

(1) 水中の光源を真上の空気中から見るとき，右図で点 P にある点光源が点 Q の位置に見えるとする．ここで点 R と点 S を右図のようにとり，$\overline{\mathrm{RS}}$ に注目すると，



$$d\tan i = d'\tan r \qquad \therefore \quad d' = \frac{\tan i}{\tan r}d$$

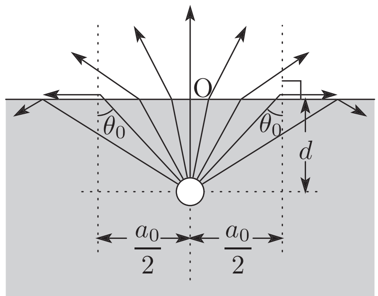
また，点 S での屈折について，

$$n\sin i = 1\cdot\sin r \qquad \therefore \quad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{n}$$

これらと与えられた近似式により，

$$d' \fallingdotseq \frac{\sin i}{\sin r}d = \frac{1}{n}\cdot d$$

(2) (a) 点光源から出る光線のうち，全反射しないで空気中に出てくる光線を遮ることができれば，上方から点光源は見えない．屈折角が $\dfrac{\pi}{2}$ となる光線に注目すると，



$$\frac{a_0}{2} = d\tan\theta_0 \qquad \therefore \quad a_0 = 2d\tan\theta_0$$

(b) 屈折の法則より，

$$n\sin\theta_0 = 1\cdot\sin\frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad \sin\theta_0 = \frac{1}{n}$$

$\sin^2\theta_0 + \cos^2\theta_0 = 1$ なので，

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cos^2\theta_0 = 1 \qquad \therefore \quad \cos\theta_0 = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$$

これらと (a) より，

$$a_0 = 2d\cdot\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} = 2d\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

【3】

《解答》

(1) $\begin{cases} \text{点 A における屈折} \cdots n_1 \sin\theta_1 = 1 \cdot \sin\theta_0 \\ \text{点 B における屈折} \cdots n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_1\right) \end{cases}$

(2) $\theta_0 = \theta_{0\mathrm{c}}$ のとき，(1) で $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$ となるので，

$$\begin{cases} n_1 \sin\theta_{1\mathrm{c}} = \sin\theta_{0\mathrm{c}} \quad \cdots (*) \\ n_2 \sin\dfrac{\pi}{2} = n_1 \cos\theta_{1\mathrm{c}} \qquad \therefore \quad \cos\theta_{1\mathrm{c}} = \dfrac{n_2}{n_1} \end{cases}$$

(3) (2) より，

$$\sin\theta_{1\mathrm{c}} = \sqrt{1 - \cos^2\theta_{1\mathrm{c}}} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

これを $(*)$ に代入すると，

$$n_1\sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \sin\theta_{0\mathrm{c}} \qquad \therefore \quad \sin^2\theta_{0\mathrm{c}} = {n_1}^2 - {n_2}^2$$

(4) $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$ となる臨界の場合とくらべて点 B への入射角が大きくなると，点 B で全反射する．また，θ_0 を小さくすると θ_1 も小さくなり点 B への入射角は大きくなるので，点 B で全反射するための条件は，

$$\sin\theta_0 \leqq \sin\theta_{0\mathrm{c}} \qquad \therefore \quad \sin^2\theta_0 \leqq {n_1}^2 - {n_2}^2$$

【4】

《解答》

(1) 屈折の法則より，

$$n\sin\alpha = 1\cdot\sin(\alpha+\beta) \qquad \therefore \quad n = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} \quad \cdots ①$$

(2) 与えられた近似式と ① より，

$$n \fallingdotseq \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \qquad \therefore \quad \beta = (n-1)\alpha \quad \cdots ②$$

(3) 与えられた近似式と ② より，

$$\frac{h}{f} = (n-1)\cdot\frac{h}{R} \qquad \therefore \quad f = \frac{R}{n-1}$$

(4) (3) をふまえると，$a = \dfrac{R_1}{n-1}$，$b = \dfrac{R_2}{n-1}$ と表せるので，

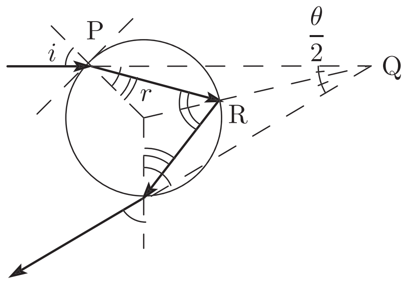
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{n-1}{R_2}$$

(5) 焦点距離を改めて f とすると，(4) より，

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{n-1}{R_2} \qquad \therefore \quad f = \frac{R_1R_2}{(n-1)(R_1+R_2)}$$

【5】

《解答》



(あ) 右図の $\triangle$PQR の内角の和が π なので，

$$\frac{\theta}{2} + (i - r) + (\pi - r) = \pi \qquad \therefore \quad \theta = 2(2r - i)$$

(い) 屈折の法則より，

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \qquad \therefore \quad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$$

(う) 図 3 で光線 8〜10 の範囲の光がせまい範囲に集中して出ていくので，この方向では光が強い．この方向に対応する角度は，図 2 より約 42 度と分かる．

(え) 波長が長い可視光なので，赤色に相当する．

(お) 図 4 より，波長が短い光では光が集中して出ていく方向に対応する角度が小さいので，内側に見られる．

5章　光波の干渉

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) $\lambda_1 = \dfrac{\lambda}{n_1}$

(2) $n_1 > 1$ なので，A 点での反射でのみ光波の振動に 0.5 回分 (半周期分) のずれを生じることに注意すると，経路差 $2d$ の 2 つの反射光が強め合う条件は，

$$2d = \frac{\lambda_1}{2} \cdot (2m+1) \qquad \therefore \quad 2d = \frac{\lambda}{n_1}\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

(3) d が十分に小さく 2 つの反射光の経路差が 0 とみなせるときは，反射による寄与のみが問題となる．A 点での反射では光波の振動に 0.5 回分 (半周期分) のずれを生じているので，2 つの反射光は互いに弱めあう．

(4) $n_2 > n_1 > 1$ なので，A 点での反射も B 点での反射もともに光波の振動に 0.5 回分 (半周期分) のずれを生じて，これらが相殺することに注意すると，強めあう条件は，

$$2d = \lambda_1 \cdot m \qquad \therefore \quad 2d = \frac{\lambda}{n_1} \cdot m$$

また，弱めあう条件は，

$$2d = \lambda_1 \cdot \left(m + \frac{1}{2}\right) \qquad \therefore \quad 2d = \frac{\lambda}{n_1} \cdot \left(m + \frac{1}{2}\right)$$

【注】強めあう条件の式は，$d = 0$(膜厚が 0) の場合 ($m = 0$ に相当) も含めて表した．

(5) $d = d_{\mathrm{M}}$ のとき，$m = 0$ で弱めあう条件を満たすので，

$$2d_{\mathrm{M}} = \frac{\lambda}{n_1} \cdot \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad d_{\mathrm{M}} = \frac{\lambda}{4n_1}$$

【2】

《解答》

(1) ガラス板の密着点から距離 x の位置におけるガラス板の間隔を y とすると，

$$\frac{y}{x} = \frac{D}{l} \qquad \therefore \quad y = \frac{Dx}{l}$$

G_2 の上面 B での反射でのみ光波の振動に 0.5 回分 (半周期分) のずれを生じることに注意すると，経路差 $2y$ の 2 つの反射光が弱めあって暗線が観測される条件は，

$$2 \cdot \frac{Dx}{l} = \lambda \cdot k \qquad \therefore \quad x = \frac{l\lambda}{2D} \cdot k$$

(2) (1) をふまえると，

$$\Delta x = \frac{l\lambda}{2D} \cdot (k+1) - \frac{l\lambda}{2D} \cdot k = \frac{l\lambda}{2D}$$
$$\therefore \quad D = \frac{l\lambda}{2\Delta x}$$

数値を代入すると，

$$D = \frac{0.040 \times (5.9 \times 10^{-7})}{2 \times (4.7 \times 10^{-4})} \fallingdotseq 2.5 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}$$

(3) 水中における光の波長を λ' とすると，$\lambda' = \dfrac{\lambda}{n}$ と表せるので，

$$\Delta x' = \frac{l\lambda'}{2D} = \frac{l\lambda}{2nD}$$

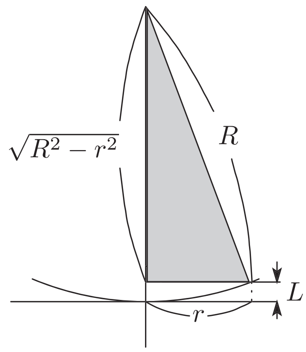
これと Δx の比をとると，

$$\frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{1}{n} \qquad \therefore \quad n = \frac{\Delta x}{\Delta x'} = \frac{4.7 \times 10^{-4}}{3.6 \times 10^{-4}} = 1.3$$

【3】

《解答》

(1) 右図をふまえると，



$$L = R - \sqrt{R^2 - r^2}$$

ここで，与えられた近似式を用いると，

$$\sqrt{R^2 - r^2} = R\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}} \fallingdotseq R\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$\therefore \quad 2L = 2\left\{R - R\left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right)\right\} = \frac{r^2}{R}$$

(2) 点 a での反射でのみ光波の振動に 0.5 回分 (半周期分) のずれを生じることに注意すると，経路差 $2L$ の 2 つの反射光が弱めあう条件は，

$$\frac{{r_i}^2}{R} = \lambda \cdot i \qquad \therefore \quad r_i = \sqrt{\lambda R \cdot i}$$

(3) (2) より，$i+1$ 番目の暗い円環では，

$$r_{i+1} = \sqrt{\lambda R \cdot (i+1)}$$

${r_{i+1}}^2$ と ${r_i}^2$ の差をとると，

$${r_{i+1}}^2 - {r_i}^2 = \lambda R(i+1) - \lambda R i \qquad \therefore \quad R = \frac{{r_{i+1}}^2 - {r_i}^2}{\lambda}$$

数値を代入すると，

$$R = \frac{(7.0\times 10^{-3})^2 - (6.5\times 10^{-3})^2}{5.9\times 10^{-7}} \fallingdotseq 11\,\mathrm{m}$$

【4】

《解答》

(1) $S_1P = \sqrt{l^2 + \left(x - \dfrac{d}{2}\right)^2}$

(2) $S_2P = \sqrt{l^2 + \left(x + \dfrac{d}{2}\right)^2}$

(3) $S_1P = l\sqrt{1 + \dfrac{1}{l^2}\left(x - \dfrac{d}{2}\right)^2}$

$\fallingdotseq l\left\{1 + \dfrac{1}{2l^2}\left(x - \dfrac{d}{2}\right)^2\right\} = l + \dfrac{1}{2l}\left(x - \dfrac{d}{2}\right)^2$

(4) $S_2P = l\sqrt{1 + \dfrac{1}{l^2}\left(x + \dfrac{d}{2}\right)^2}$

$\fallingdotseq l\left\{1 + \dfrac{1}{2l^2}\left(x + \dfrac{d}{2}\right)^2\right\} = l + \dfrac{1}{2l}\left(x + \dfrac{d}{2}\right)^2$

(5) $S_2P - S_1P = \dfrac{1}{2l}\left(x + \dfrac{d}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2l}\left(x - \dfrac{d}{2}\right)^2$

$= \dfrac{d}{l}x$

(6) 明線

(7) m を整数とすると，P 点に明線が生じるための条件は，

$$\frac{d}{l}x = \lambda \cdot m \qquad \therefore \quad x = \frac{l\lambda}{d} \cdot m$$

明線の間隔を $\varDelta x$ とすると，

$$\varDelta x = \frac{l\lambda}{d} \cdot (m+1) - \frac{l\lambda}{d} \cdot m = \frac{l\lambda}{d}$$

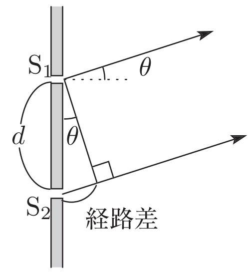
(8) (7) より $\varDelta x$ は λ に比例していて，λ は青色光の方が赤色光よりも短い．よって，明線の間隔はせまくなる．

【5】

《解答》

(1) (ア) S_1P と S_2P が平行とみなせるとき，S_1 から S_2P に垂線を下ろすことにより，

$$(\text{経路差}) \fallingdotseq d\sin\theta$$



(イ) 整数倍

(ウ) $d\sin\theta = \lambda \cdot n$

(エ) $d\sin\theta = \lambda \cdot \left(n + \dfrac{1}{2}\right)$

(2) 回折格子の隣り合うスリットを通る光が強め合う条件は，(1) と同様に，

$$d\sin\theta = \lambda \cdot n \qquad \therefore \quad \sin\theta = \frac{n\lambda}{d}$$

また，幾何学的な関係より，

$$L\tan\theta = x_n \qquad \therefore \quad \tan\theta = \frac{x_n}{L}$$

近似式 $\sin\theta \fallingdotseq \tan\theta$ より，

$$\frac{n\lambda}{d} = \frac{x_n}{L} \qquad \therefore \quad x_n = \frac{nL\lambda}{d}$$

(3) すじが 1 mm あたり 100 本のとき，

$$d = \frac{1 \times 10^{-3}}{100} = 1 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}$$

ここで $n = 3$ の明点に注目すると，(2) より，

$$x_3 = \frac{3L\lambda}{d} \qquad \therefore \quad \lambda = \frac{x_3 d}{3L} = \frac{0.190 \times (1 \times 10^{-5})}{3 \times 1.00} \fallingdotseq 6.33 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

(4) (2) より，同じ n のとき長波長の光では x_n が大きく短波長の光では x_n が小さい．このため，同じ n に対しては，スクリーンの中心に近い側から順に紫藍青緑黄橙赤 (遠い側から順に赤橙黄緑青藍紫) と色づいた縞が見られる．

(5) $n = 1$ の明点に注目すると，(2) より，

$$x_1 = \frac{1 \times 1.00 \times \lambda}{1 \times 10^{-5}} = 1 \times 10^5 \cdot \lambda$$

ここで $380 \times 10^{-9}\,\mathrm{m} \leqq \lambda \leqq 770 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$ なので，

$$(1 \times 10^5) \times (380 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}) \leqq x_1 \leqq (1 \times 10^5) \times (770 \times 10^{-9}\,\mathrm{m})$$

$$\therefore \quad 3.80\,\mathrm{cm} \leqq x_1 \leqq 7.70\,\mathrm{cm}$$

補充問題

■演習

【1】

《解答》

(ア) $\lambda' = \dfrac{\lambda}{n_0}$

(イ) $\alpha + m$

(ウ) $\lambda'' = \dfrac{\lambda}{n_0 + kp}$

(エ) ①より,

$$l = \alpha \cdot \frac{\lambda}{n_0} \qquad \therefore \quad \alpha = \frac{n_0 l}{\lambda}$$

これを②に代入すると,

$$l = \left(\frac{n_0 l}{\lambda} + m\right) \cdot \frac{\lambda}{n_0 + kp} \qquad \therefore \quad l = \frac{m\lambda}{kp}$$

(オ) (エ) より,

$$2d = \frac{m\lambda}{kp} \qquad \therefore \quad p = \frac{m\lambda}{2kd}$$

(カ) スクリーンが明るい状態から暗い状態になるとき, (オ) の m が $\dfrac{1}{2}$ だけ変化するので,

$$\varDelta p = \frac{\lambda}{2kd} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{4kd}$$

【2】

《解答》

(ア) $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

(イ) $\lambda_1 = \dfrac{\lambda}{n_1}$

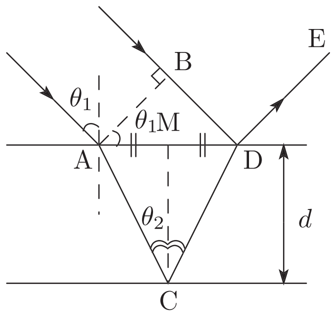
(ウ) $\lambda_2 = \dfrac{\lambda}{n_2}$

(エ) 媒質IIとIIIの境界では $n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3$ が成立しているので，$n_1 \sin\theta_1 = n_3 \sin\theta_3$

(オ) (エ) で，$\theta_3 = \dfrac{\pi}{2}$ となるとき，

$$n_1 \sin\theta_1 = n_3 \sin\frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad \sin\theta_1 = \frac{n_3}{n_1}$$

(カ) $\overline{\mathrm{AD}} = 2 \times d\tan\theta_2$ と表せるので，



$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BD}} &= \overline{\mathrm{AD}}\sin\theta_1 \\ &= 2d\sin\theta_1\tan\theta_2\end{aligned}$$

(キ) BD 間に入る波の数を N_1 とすると，

$$N_1 = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\lambda_1} = \frac{2n_1 d\sin\theta_1\tan\theta_2}{\lambda}$$

(ク) $\overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{CD}} = \dfrac{d}{\cos\theta_2}\cdot 2$

(ケ) ACD 間に入る波の数を N_2 とすると，

$$N_2 = \frac{\overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{CD}}}{\lambda_2} = \frac{2n_2 d}{\lambda\cos\theta_2}$$

(コ) D での反射でのみ光波の振動に 0.5 回分 (半周期分) のずれを生じるので，$N_2 - N_1 = m$

(サ) $N_2 - N_1 = m - \dfrac{1}{2}$

【3】

《解答》

(1) $n\sin\alpha' = 1\cdot\sin\alpha$

(2) $\lambda' = \dfrac{\lambda}{n}$

(3) 図 1 より，入射前には左側の経路が $d\sin\alpha$ だけ長く，屈折後には右側の経路が $d\sin\beta$ だけ長い．よって，2 つの光の経路差は $d\sin\alpha - d\sin\beta$ となり，これらの光が強め合うための条件は，

$$d(\sin\alpha - \sin\beta) = \lambda\cdot m$$

(4) 等間隔で並んでいる溝によって回折した光が干渉するが，光が強め合う方向は光の波長により異なっているから．

(5) $\alpha = 60^\circ$ であてたとき，$m = 1$ で強め合う方向が $\beta = 30^\circ$ なので，

$$d(\sin 60^\circ - \sin 30^\circ) = \lambda\cdot 1 \qquad \therefore \quad \lambda = \frac{\sqrt{3}-1}{2}d \fallingdotseq 5.9\times 10^{-7}\mathrm{m}$$

【4】

《解答》

(ア) 光源と P との距離を a とすると，問題文より，

$$a \cdot 2 + d = L \qquad \therefore \quad a = \frac{L-d}{2}$$

(イ) P とスクリーンの距離を b とすると，

$$\frac{L-d}{2} + b = L \qquad \therefore \quad b = \frac{L+d}{2}$$

レンズの焦点距離を f として，レンズの公式 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}$ より，

$$\frac{2}{L-d} + \frac{2}{L+d} = \frac{1}{f} \qquad \therefore \quad f = \frac{L^2-d^2}{4L}$$

(ウ) レンズの位置をずらした状態で，レンズの公式より，

$$\frac{1}{a-\varDelta a} + \frac{1}{b+\varDelta b} = \frac{1}{f} \qquad \cdots (*)$$

与えられた近似式を用いると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-\varDelta a} + \frac{1}{b+\varDelta b} &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{-\varDelta a}{a}} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{\varDelta b}{b}} \\ &\fallingdotseq \frac{1}{a}\left(1 - \frac{-\varDelta a}{a}\right) + \frac{1}{b}\left(1 - \frac{\varDelta b}{b}\right) \\ &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{\varDelta a}{a^2} - \frac{\varDelta b}{b^2}\end{aligned}$$

これを $(*)$ に代入すると，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{\varDelta a}{a^2} - \frac{\varDelta b}{b^2} = \frac{1}{f} \qquad \therefore \quad \varDelta b = \frac{b^2}{a^2} \times \varDelta a$$

(エ) 鮮明な像が現れるとき，光源からスクリーンまでの距離は，

$$(a-\varDelta a) + (b+\varDelta b) = a + b + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)\varDelta a$$

よって，スクリーンを動かす距離は，

$$\begin{aligned}\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)\varDelta a &= \left\{\left(\frac{L+d}{L-d}\right)^2 - 1\right\}\varDelta a \\ &= \frac{4Ld}{(L-d)^2}\varDelta a\end{aligned}$$

(オ) L_1 と像 $\mathrm{A'B'}$ との距離を b_1 として，レンズの公式より，

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{f_1} \qquad \therefore \quad b_1=\frac{a_1 f_1}{a_1-f_1}$$

L_1 による結像の倍率を m_1 とすると，

$$m_1=\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}}=\frac{b_1}{a_1}=\frac{f_1}{a_1-f_1}$$

(カ) L_1 による実像 $\mathrm{A'B'}$ を改めて物体とみなして，レンズの公式を適用する．$\mathrm{A'B'}$ と L_2 との距離を a_2 とすると，

$$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{-D}=\frac{1}{f_2} \qquad \therefore \quad a_2=\frac{Df_2}{D+f_2}$$

よって，L_2 による結像の倍率を m_2 とすると，

$$m_2=\frac{\mathrm{A''B''}}{\mathrm{A'B'}}=\frac{D}{a_2}=\frac{D+f_2}{f_2}$$

(キ) 合成倍率を m とすると，

$$m=m_1 m_2=\frac{f_1(D+f_2)}{f_2(a_1-f_1)}=90$$

(ク) 図 2 より，レンズ間の距離は，

$$b_1+a_2=\frac{a_1 f_1}{a_1-f_1}+\frac{Df_2}{D+f_2}\fallingdotseq 28.17\,\mathrm{cm}$$

【5】

《解答》

(1) (ア) $\overline{\mathrm{OB'}}$

(イ) b

(ウ) $\overline{\mathrm{A'B'}}$

(エ) $b-f$

(オ) $\dfrac{b-f}{f}$

(カ) (オ) より，

$$\frac{b}{a}=\frac{b}{f}-1 \qquad \therefore \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

(キ) △ ABO と△ A′B′O の相似比より，倍率 $m=\dfrac{b}{a}$

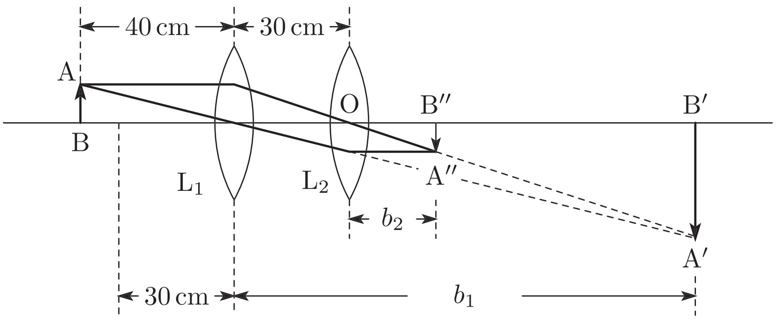
(2) (a) (カ) に $f=50\,\mathrm{cm}$，$a=25\,\mathrm{cm}$ を代入すると，

$$\frac{1}{25}+\frac{1}{b}=\frac{1}{50} \qquad \therefore \quad b=-50\,\mathrm{cm}$$

レンズの左側 50 cm の位置に像ができる．このとき，結像の倍率は $\left|\dfrac{b}{25\,\mathrm{cm}}\right|=2$ 倍なので，像の大きさは $\overline{\mathrm{A'B'}}=8\,\mathrm{cm}$ となる．

(b) 虚像

(3)



(a) $\mathrm{L_1}$ から像 A′B′ までの距離を b_1 として，(2)(a) と同様に立式すると，

$$\frac{1}{40}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{30} \qquad \therefore \quad b_1=120\,\mathrm{cm}$$

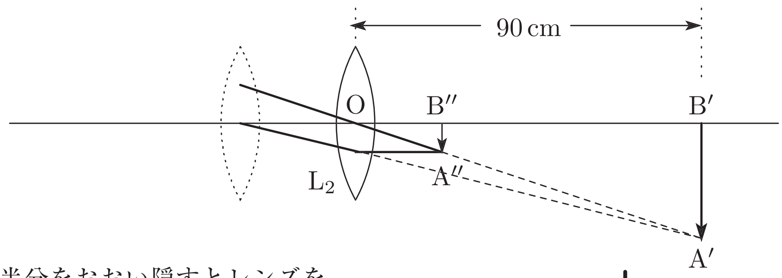
レンズ $\mathrm{L_1}$ の右側 120 cm の位置に実像ができる．このとき，結像の倍率は $\dfrac{b_1}{40\,\mathrm{cm}}=3$ 倍なので，像の大きさは $\overline{\mathrm{A'B'}}=12\,\mathrm{cm}$ となる．

(b) 光線を逆行させて考えると，仮に A″B″ に物体を置いて左側から見たとしたとき，A′B′ が対応する虚像となることが分かる．$\mathrm{OB''}=b_2$ として，(a) と同様に立式す

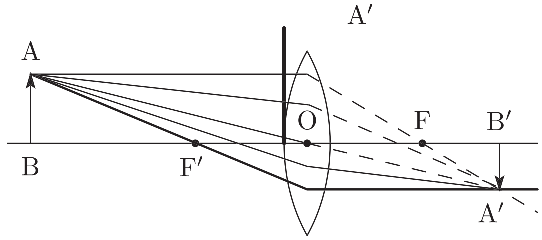
ると，

$$\frac{1}{b_2} + \frac{1}{-90} = \frac{1}{30} \qquad \therefore \quad b_2 = 22.5\,\mathrm{cm}$$

レンズ L_2 の右側 22.5 cm の位置に実像ができる．



(4) レンズの上半分をおおい隠すとレンズを通る光の量が半分になるので，像の明るさも半分になる．しかし，像の大きさとできる位置は変わらない．



P3JR
物理波動入門

Z-KAI

会員番号		氏　名	