

Z 会進学教室 葛西通信 9 月号

葛西教室に通う本科生の皆さんは、以下の四点を心がけるようにしましょう。

- 1 進学塾に通う中学生としての自覚を持つこと。
- 2 信頼の土台となるあいさつをきちんとすること。
- 3 書くことを大切にし、ノートをしっかりとること。
- 4 自習室を上手に利用し、自分で考えてもわからないことは遠慮なく先生に質問すること。

葛西教室より

「ものごとを理解する」ということ

東京大学大学院数理科学研究科博士課程 2 年 M.A.

皆様、はじめまして。東京大学大学院数理科学研究科博士課程 2 年の M.A. と申します。私は高校受験の際、長妻先生にご指導いただいていた。2013 年のことなのでもう 11 年前のことです。当時はまだ葛西に教室がなく、私が授業を受けていたのは御茶ノ水教室でした。そのご縁があって今回寄稿させていただいています。



実は、私が大学に入学したてだった 7 年前にも葛西通信に寄稿したことがあります。ですから、もし当時から葛西通信を読んでいる古参の方がいらっしゃれば「お久しぶりです」ということになると思います。あ、バックナンバーを漁るのはやめてください。

7 年前に自分が書いた内容がどんなものだったかはあまり覚えていませんが、きっと高校生活の振り返りや、始まったばかりの大学生活のことを書いていたのだと思います。ですから、今回はその後の話、つまりこれまでの大学生活で自分が学んだことについて書きたいと思います。

- ・ ものごとを徹底的に理解すること
- ・ ものごとの概要をかいつまんで理解すること
- ・ 視野を広げるには環境が大事であるということ

の三つに分けてお話します。

私はずっと数学科の中で過ごしてきました。しかし、ここでは数学とは縁遠い人でも共感していただける何かがあるように、なるべく数学特有の話にならないようにします。どうぞお付き合いください。

数学という学問について

初めに、私が専攻している数学という学問について簡単に説明したいと思います。「数学特有の話をしない」と言った矢先から数学特有の話をすることになりますが、許してください。この後の話が少しとっつきやすくなるかもしれません。

さて、どの学問にもその分野の特色というものがあると思いますが、数学も際立った特色のある学問です。

「数学が何か」ということについては誰もが自分なりのイメージを持っていると思います。中学・高校の教科の中に数学がありますから、その延長線上にあると想像することは容易です。学問としての数学は、確かに中高で学ぶ数学と地続きの部分もあります。

しかし、両者の間に大きな断絶があるのもまた事実です。私の考えでは、学問としての数学の特徴は、以下のものです。

- ・ 論理的な正しさは数学の研究における大前提である。
- ・ 論理が破綻しない範囲であれば、どんな突飛な考えでも受容される。

他の自然科学の分野では「現実世界の現象を説明できる」ことが一番重要ですから、これらの観点については多少大目に見られます。例えば「道路が濡れているということはさっきまで雨が降っていたのだろう」と言うと、数学の世界では「打ち水のせいで道路が濡れている可能性はないのですか」と突っ込まれます。逆に、複素数のように、一般には「本当に存在するのか」と言いたくなるようなもの（「南に $1 + 2i$ km 進む」とか言われても意味不明です）も、論理的に破綻しないことが確実に言えるのならば数学では全く問題ありません。実際、現代数学では複素数など比ではない突飛な対象が数多く考えられています。それらも論理的な破綻を引き起こすことがないために受け入れられています。

ものごとを徹底的に理解すること

本題に入ります。私は大学に

- ・ 学部生として4年間、
- ・ 大学院生として3年間

所属していますが、ものごとを徹底的に理解するということを体得したのは学部生としての4年間だったと思います。それが身についたのは、一義的には先ほど説明した「論理的な正しさが大前提である」という数学の際立った特徴ゆえだと思います。以下では、かけ算の筆算という簡単な具体例を挙げながら「徹底的に理解する」ということについて考えたいと思います。



一口に「理解」と言っても色々な段階があります。何かを勉強しているとき、あるタイミングで「完全に理解した」はずなのにもう 1 時間勉強を進めると「なんもわからん」と思うことが私にはありますが、これは「理解」にいくつかの階層があると考えれば納得できます。その階層がどのような構造をしているか、これが私の学んだことです。



私の考えでは、「理解」の階層は以下の三つに分かれています。

1. とりあえず表面的に理解する
2. なぜその方法が正しいかを説明することができる
3. その方法を開発しようと思った動機を説明することができる

具体例を使いながら、順を追って見ていきます。今、 33×27 を計算せよという問題が与えられているとします。2桁どうしのかけ算なので、暗算が厳しいとすれば次の筆算の図が頭に浮かぶはずです。

$$\begin{array}{r} 33 \\ \times 27 \\ \hline 231 \\ 66 \\ \hline 891 \end{array}$$

これでめでたく答えが 891 であることが分かります。この調子で、「とにかく筆算を使って答えを出すことができる」なら、「1. とりあえず表面的に理解する」はクリアです。人はここで一度「筆算完全に理解した」と言います。

しかし、冷静に考えると筆算には謎があります。どうしてこの方法でかけ算の結果が正しく計算できるのでしょうか。筆算の計算は素早くできたとしても、「なぜこれでいいの」と聞かれると一瞬答えに詰まるかもしれません。（「これくらいならさすがに説明できるよ」という幻聴が聞こえてきました。）答えに詰まったとき、人は「筆算なんもわからん」と言います。これにすぐ答えられる人が「2. なぜその方法が正しいかを説明することができる」まで理解を進めた人です。

私の実感では、1.と 2.の間には結構大きな溝があります。解答解説を読めば分かるのに自力では問題を解けないという人は、だいたい 1.と 2.のはざまにいる人です。

先ほどの筆算の例を使って「2. なぜその方法が正しいかを説明することができる」レベルの理解がどんなものかを考えてみます。まず、筆算がやっていることを言葉で説明してみるのがいいです。上で書いた筆算の図を用いず、あえて言葉だけでやっていることを表現すれば以下のようになります。

- ・ 上の行の数と下の行の数の一番下の位の数のかけ算を計算し、下線の下に書く。
- ・ 上の行の数と下の行の数の下から 2 番目の位の数のかけ算を計算し、さっき書いた数の下に、一つ左にずらして書く。
- ・ 最後に、2 つの数を、列をそろえて足し算する。(繰り上がりがあればそれも考慮する。)

どう考えてもさっきの筆算の図で説明してもらった方が分かりやすい気がします。これを読んでいると頭がくらくらしてきます。確かに計算方法だけを知りたい場合はさっきの図が分かりやすいですが、「本当のところこの図は何をしているか」を理解するためには言葉で説明した方が整理されます。ポイントを抽出すると以下の通りです。

- ・ 二桁×二桁のかけ算を計算する代わりに、二桁×一桁のかけ算を 2 回している。
- ・ 下の行の何番目の数をかけるかに応じて、かけ算の結果を左に何回かずらしている。

ここまで来れば、「なぜ筆算でかけ算を正しく計算できるのか」という問いの純度を高めることができます。つまり、次の問いに答えればいいことが分かります。

「下の桁の何番目の数をかけるかに応じてかけ算結果を左にずらす」というテクニックを使うことで、二桁×二桁のかけ算の計算が二桁×一桁のかけ算の計算の繰り返しと同等になるのはなぜか？

ここまで問いを明確化すれば答えも直ちに出すことができます。結局、次の式変形がポイントです。

$$33 \times 27 = 33 \times (20 + 7) = (33 \times 2) \times 10 + (33 \times 7)$$

33×2の方には10倍がかかっているから、筆算の式で左に一つずらしてから足し算をするということです。ここまでの説明ができたとき、人は再び「筆算完全に理解した」と言います。

最後に「3. その方法を開発しようと思った動機を説明することができる」という理解のレベルについて考えます。2.までをクリアした人は確かに筆算ができ、筆算の正しさを説明することができます。それでも、「筆算なんて頭のいい方法どうやって思いついたんだ」という疑問は依然として残ります。典型問題は解けるけど応用問題になると解けなくなる、という人は2.と3.のはざまにいるのかもしれませんが。この疑問にぶち当たったとき、人は再び「筆算なんもわからん」と言うかもしれませんし、「仕組みまで説明できるしなんもわからんことはない」と言うかもしれません。このレベルにいるのに「なんもわからん」と言う周囲の人に怒られる可能性があります。



さて、この「3. その方法を開発しようと思った動機を説明することができる」については2.までに比べて答えの自由度が相当高くなります。このレベルの問いは唯一絶対の答えがあるものではなく、「自分はこう思う」とか「あの人はこう思っている」とかいうことがありえるところです。さらに、時間の経過とともに自分自身の理解の方法も変わっていくところです。理解とは、日々磨き上げられていくものです。

ここでは私自身の考える答えを紹介します。根本にあるのは「複数桁×複数桁の計算はしんどいが、複数桁×一桁の計算はそんなにしんどくない」という事実だと思います。複数桁×一桁のかけ算の繰返しに直したいと思えば、3段落前の式変形が自然と浮かび上がってきます。あとはそれをどのように視覚化するかの問題です。（視覚化の方法を思いつくのが大変なのだ、という指摘は十分あり得ます。）この事実に深く注目していれば、筆算は皆さん自身が独自に発明できたテクニックかもしれません。

もう一つ私が重要と考えることは、「筆算の原理は汎用性が高い」ということです。実は、さっき例に挙げた 33×27 の計算は瞬殺する方法があります。それは $33=30+3$, $27=30-3$ と見て

$$(30 + 3) \times (30 - 3) = 30^2 - 3^2 = 900 - 9 = 891$$

とする方法です。中学3年生以上なら一度は見たことがある手法だと思います。しかし、この方法は汎用性が高くありません。たまたま30と3は2乗が計算しやすく、たまたまかけ算の数がこれらの和と差だったという奇跡を用いています。これに比べて、筆算はいつでも可能だという利点があります。

皆さん自身は、筆算という手法を考え出した動機は何だと考えるのでしょうか。私が答えらしきものを出してしまったせいで上の答え以外思いつかなくなってしまったかもしれません。しかし、同様のことを考えられる題材はたくさん転がっています。中学2年生以上であれば、連立方程式を解くときに加減法と代入法の2つの解法を習ったと思います。これら2つの方法それぞれでちゃんと答えが出るのはなぜか、またこれらの手法を比較したときのそれぞれの強みと弱みを考えてみてはいかがでしょうか。また、ベクトルを習った高校生であれば次の問いを考えてみると面白いかもしれません。「一見複雑そうに見えた図形問題が内積を使うことでただの計算問題になることがある。これはなぜか。」



これらの問いを考えることで、今まで分かっていると思っていたことに対して「なんもわからん」と感じるかもしれません。それはきっと、自分自身がものごとをより深く理解するための準備を整えた証拠です。

ものごとの概要をкаいつまんで理解すること

次は、先ほどとは真逆の話です。私は学部生の間、また修士課程の間はものごとを徹底的に理解することに心血を注いできました。しかし、研究を始めると必要な知識は次々と増えていきます。徹底的な理解はちょっとやそっとの時間でできるものではありませんので、学ばないといけないことと習得できることの差がどんどん増えていきます。そのための対処法がここでお話することです。

研究を始めると学ばないといけないことがどんどん増えていくと言いましたが、これは「徹底的に理解しないといけないことが増えていく」こととは少し違います。より重要なのは、

- ・ 自分が取り組んでいる課題（徹底的に理解しないといけないこと）の周りにどんな風景が広がっているのか
- ・ 周辺分野ではどのようなものの見方がなされているのか

を幅広く知っておくことです。「広く浅く」と言い換えることも可能かもしれません。私の指導教員はよく「耳学問」という言葉を使います。



再びかけ算の例で考えてみます。先ほどまではかけ算の筆算と呼ばれるものを徹底的に理解しました。しかし、もし今の自分の課題が「割り算の計算を素早く行うためにはどうしたらいいか」ということであればかけ算の筆算について深く知っている必要はないかもしれません。極論を言えば、

- ・ かけ算の計算には筆算という視覚的に分かりやすいテクニックがある

ということだけ知っていれば、「かけ算における筆算に対応する割り算のテクニックとは何だろう」という問いを立てることができます。そして、皆さんご存じの割り算の筆算の方法を思いつくことすら可能かもしれません。

視野を広げるには環境が大事であるということ

ここまで、ものごとを理解するということの異なる2つの枠組みについて考えてきました。これらはどちらか一つだけ身につけていればいいというものではなく、両方組み合わせることで偉大な力を発揮するものです。理解できていることは徹底的に理解しているのに、それ以外については何も分からない人は視野が狭くなり、新しいことを行うことが難しくなります。色んなことを広く見分しているのに何一つきちんと理解していない人は何を話しても当てずっぽうと連想ゲームをしているにすぎません。

両者をバランスよく身につけるためにはどうしたらよいか。私は、その答えは自分のいる環境を意識することだと思います。

私自身、ものごとを徹底的に理解することは得意ですが、概要をかいつまんで理解するのはあまり得意ではありません。数学という学問の特性上、そういう人は多いかもしれません。後者の重要性に気づいたのは研究を本格的に始めた修士2年から博士1年の頃であり、今でも訓練中です。

それまでは「突き詰めていないならば理解ではない」と考えていました。「平家にあらずんば人にあらず」と同じノリです。



おそらくその考え方が変わっていったのは、修士以降に指導してくださっている指導教員の先生のおかげです。ことあるごとに自分の専門外の数学で共有されているアイデアの話を教えてくださっています。また、先ほども言及しましたが、「耳学問」という言葉をよく使います。そして何より先生自身がセミナーを通して自分の専門外の分野のアイデアを吸収しようとしています。

周りの研究者の方を見ても、「細部まで完全に理解したわけではないけど、ある分野ではこれこれこういうアイデアがある」という話をされていることがよくあります。そしてそのアイデアを自らの研究分野に生かし、徹底的に考察することで新しい成果につなげています。

両者のバランスをとってものごとを理解している人の実例をたくさん見ることは、自分自身がその能力を身につけることへの一番の近道です。私自身、「この人たちと出会っていなかったら専門分野についての自分の理解はここまで深くならなかっただろう」と何度も感じてきました。本や動画ではなく、人づてでしか伝わらない何かは確実に存在します。

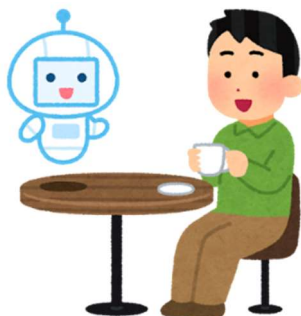
そういう人たちに会えるかどうかはつまるところ運です。ですから「こうすれば必ずうまくいく」という方法はありません。私は非常に幸運なことに今の指導教員に巡り合いました。チャンスを逃さないよう個々人にできることは

- ・ できるだけいい人に巡り合えそうな環境に身を置くこと
- ・ 斜に構えず、まっすぐに向き合うこと

ではないかと思います。……自分で書いておきながら、自分自身に刺さってきました。



最後に



我ながらとても長い文章になってしまいました。ここまですべて読んでくださった方、ありがとうございます。途中で飛ばしてしまった方、分かります。私も推敲をするのが面倒です。そうだ、ここまでの内容を ChatGPT に投げて要約してもらいましょう。以下、完全に遊びです。使ったバージョンは GPT-4o です。

私

内容を 300 字以内で要約してください。著者の考えをまとめる形で書いてください。

具体例は著者が説明したいことを分かりやすくするために出しただけであり、具体例そのものの内容を伝えたいわけではないことに注意してください。

ChatGPT

著者は、物事の理解には段階があるとし、それぞれに適したアプローチが必要だと論じています。具体的には、まず表面的に理解し、次にその方法が正しい理由を説明できるようになり、最後にその方法を開発する動機を説明できる段階に進むことが重要だとしています。このプロセスを通じて深い理解が得られると述べています。また、環境の重要性についても触れ、幅広い知識を持つことと徹底的な理解のバランスが大切であると強調しています。

ちょっといまいちですね。「ものごとの概要をかいつまんで理解すること」について書かれています。

私

「ものごとの概要をかいつまんで理解すること」についても書かれていますよね。これも含めてください。また、「環境」というだけでは不明確なので、それが表す実質的な意味を考えてください。



ChatGPT

著者は、まず物事の概要をかいつまんで理解することの重要性について述べています。これは、全体像を把握し、詳細に入る前に基本的な理解を確立するステップです。その上で、理解の深さを段階的に深めるプロセスを提案しています。具体的には、表面的な理解から始まり、その方法の正当性を説明できる段階へ、さらにその方法を開発する動機を説明できる段階へと進むことが必要だと論じています。このプロセスにより、物事を深く理解できるようになるとしています。

また、著者は「環境」の重要性についても言及しています。ここでの環境とは、学習や理解を深めるための周囲の状況やリソースを指します。広範な知識を持つことと、特定の分野における徹底的な理解のバランスが重要であると強調し、多様な情報源や視点を取り入れることが、深い理解を助けると述べています。

2 つ目の段落は良い感じですが、1 つ目の段落が私の言いたいことと違います。



私

2 段落目はいい感じです。1 段落目について、著者は「ものごとを徹底的に理解すること」と「ものごとの概要をかいつまんで理解すること」を明確に区別して別々に述べています。このことを踏まえて再要約してください。

ChatGPT

著者は、物事を徹底的に理解することと、概要をかいつまんで理解することを明確に区別しています。まず、徹底的な理解とは、物事の全体像を把握し、詳細に分析することで深い理解に至るプロセスを指します。一方、概要をかいつまんで理解することは、詳細に立ち入らずに大まかな全体像を掴むことを意味します。著者は、状況に応じてこれら二つの理解方法を使い分けることが重要であり、目的に応じた適切なアプローチを取るが必要だと述べています。

うーん。そんなこと書いたっけ。



私

本文の内容に基づいて要約してください。

ChatGPT

著者は、物事の理解には「徹底的に理解すること」と「概要をкаいつまんで理解すること」の二つのアプローチがあると述べています。徹底的な理解とは、詳細に分析し、全体像を把握することで深い知識を得ることを指します。一方、概要をкаいつまんで理解することは、詳細に立ち入らずに大まかな全体像を掴むことを意味します。研究を進める上で重要なのは、必要な知識の全てを徹底的に理解することではなく、自分の課題に関連する周辺分野の知識も広く浅く知ることです。これにより、新しい視点を得ることができます。また、視野を広げるためには、自分が置かれている環境が重要であり、多様な知識やアイデアを取り入れる姿勢が大切だと述べています。

うん。これ以上はあきらめよう。ChatGPT の要約をたたき台に、私なりの要約を試みます。ChatGPT の要約は第三者視点でしたが、ここでは一人称視点で要約します。



ものごとを理解する方法は大きく分けて二種類あります。一つは徹底的な理解であり、もう一つは概要の理解です。徹底的な理解のためには単に問題の解き方が分かるということでは不十分であり、「なぜその方法で正しい答えが出るのか」や「その方法はどのようにして思いついたのか」を考えるのが重要です。一方、すべてのことを徹底的に理解することは非現実的なので、自分にとっての重要度に合わせて概要の理解に専念することも重要です。両者の理解の方式は一見相反するものですが、これらをうまく組み合わせて使うことでものごとの深い理解を得ることができます。

これらの能力を身につけるためには自分の置かれた環境が重要です。ここでの環境とは、学習や理解を深めるための周囲の状況やリソースを指します。広範な知識を持つことと、特定の分野における徹底的な理解のバランスが重要であり、多様な情報源や視点を取り入れることが、深い理解を促します。

最後にこの要約を ChatGPT に投げて、採点してもらいましょう。



私

私が自分自身で要約してみました。10 点満点で採点してください。

(以下要約文。先ほど書いたものなので省略。)

ChatGPT

あなたの要約は全体的に非常に良いです。以下の点を考慮して採点しました。

良い点

- 著者が述べた「徹底的な理解」と「概要の理解」の両方に言及しています。
- 両者のアプローチをうまく組み合わせる重要性についても触れています。
- 「環境」の重要性についても具体的に述べています。

改善点

- 「概要の理解」に関する部分でもう少し具体例や詳細があると、著者の意図がより明確に伝わるかもしれません。

この要約はほぼ正確に著者の考えを伝えているため、10 点満点中 9 点を差上げます。細部の表現を少しだけ改良するとさらに良くなるでしょう。

ほめてくれました。改善点も説得力があります。これに合わせて先ほどの要約文を変えるとすれば、「一方、すべてのことを徹底的に理解することは非現実的なので、自分にとっての重要度に合わせて概要の理解に専念することも重要です。」の一文を「一方、すべてのことを徹底的に理解することは非現実的なので、自分にとっての重要度に合わせて**根幹となるアイディア**など概要の理解に専念することも重要です。」と変えてみるとどうでしょうか。さらにいい要約になった気がします。要約の代行はしてくれませんでした、いい壁打ちの相手になってくれました。



え？この原稿の初めにこの要約を書いてくれればよかったのになって？そうしたら要約しか読んでくれないじゃないですか。



近所の公園で撮った写真。薄紫色の花はアガパンサス。ピンクの花が分からないので分かる方は教えてください。

月	日	曜	受付	本科生スケジュール					本科生以外の方対象のイベントなど	
8	27	火	14 ~ 22	休講						
	28	水		休室						
	29	木		休室						
	30	金	14 ~ 22	休講						
	31	土	14 ~ 22	都立自校作成・独自問題テスト演習						
9	1	日	12 ~ 20	9月度①						
	2	月	14 ~ 22							
	3	火	14 ~ 22							
	4	水	14 ~ 22							
	5	木		休室						
	6	金	14 ~ 22							
	7	土	14 ~ 22					14:30~17:00 小6公開実力テスト		
	8	日	12 ~ 20	9月度②						
	9	月	14 ~ 22	3SJ開講						
	10	火	14 ~ 22							
	11	水	14 ~ 22							
	12	木		休室						
	13	金	14 ~ 22							
	14	土	14 ~ 22							
	15	日	12 ~ 20	9月度③						
	16	月	14 ~ 22							
	17	火	14 ~ 22							
	18	水	14 ~ 22							
	19	木		休室						
	20	金	14 ~ 22							
	21	土	14 ~ 22					15:40~17:40 6V公開授業+説明会		
	22	日	12 ~ 20	9月度④						
	23	月	14 ~ 22	駿台模試						
	24	火	14 ~ 22							
	25	水	14 ~ 22							
	26	木		休室						
	27	金	14 ~ 22							
	28	土	14 ~ 22							
	29	日	12 ~ 20	10月度①	3V 実力テスト	3K 実力テスト	2V 月例テスト	1V 月例テスト		
	30	月	14 ~ 22							
10	1	火	14 ~ 22							
	2	水	14 ~ 22							
	3	木		休室						
	4	金	14 ~ 22							
	5	土	14 ~ 22					6V開講		