2次関数1　4回目
添削問題 解答解説

QMM4E1-Z1C1-01

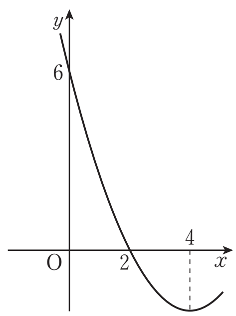
1

次の各問いに答えよ。

(1)　次の2次関数のグラフをかけ。

$$y=(x+1)(x+2)+(x+1)(x+3)+(x+2)(x+3)$$

(2)　2次関数 $y=f(x)$ のグラフが次の図のようになるのは，$f(x)$ がどのような式のときか。$f(x)$ の式を求めよ。



着眼点

(1)　2次関数のグラフがかけるよう，主要点である頂点の位置がわかる形に式変形しよう。それは，平方完成とよばれる変形である。ただし，式が複雑なので，まずは平方完成できるように展開して整理することからだ。

(2)「2次関数1」2回目で，グラフが通る点の座標をもとに2次関数の式を求めることを扱ったのを思い出そう。ただし，そのときは「点(1，3)を通る。」などと具体的にグラフが通る点の座標を与えていたが，本問では図で示しているのが違いである。自分で図を見て，グラフが通る点の座標を読みとろう。

解　答

(1)　与式の右辺を $f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x+2)+(x+1)(x+3) \\ &\qquad +(x+2)(x+3) \\ &= (x^2+3x+2)+(x^2+4x+3) \\ &\qquad +(x^2+5x+6) \\ &= 3x^2+12x+11 \end{aligned}$$

◀平方完成するために，まずは展開した形にする。

であり，これを平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2+4x+4)-1 \\ &= 3(x+2)^2-1 \end{aligned}$$

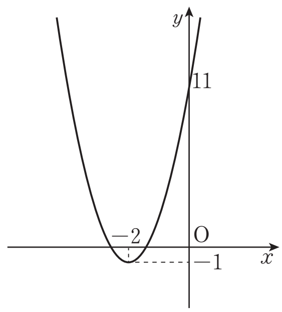
となる。よって，2次関数 $y=f(x)$ のグラフは，点

$$(-2,\ -1)$$

を頂点とする下に凸の放物線である。

また，$f(0)=11$ だから，$y=f(x)$ のグラフと y 軸との交点の座標は $(0,\ 11)$ である。

以上より，2 次関数 $y=f(x)$ のグラフは**右の図**のようになる。　**（答）**



◀もう 1 つの主要点として，y 軸との交点を示す。
$3x^2+12x+11$
に $x=0$ を代入すればよい。

(2)　与えられた図の放物線の軸は $x=4$ だから，$f(x)$ の式は

$$y=a(x-4)^2+q \quad \cdots\cdots①$$

と表すことができる。また，図より

$$x=0 \text{ のとき，} y=6,$$
$$x=2 \text{ のとき，} y=0$$

であるから，これらを①に代入して

$$a(0-4)^2+q=6,$$
$$a(2-4)^2+q=0$$

すなわち

$$16a+q=6,$$
$$4a+q=0$$

が得られる。これらを a，q の連立方程式とみて解くと

$$a=\frac{1}{2},\quad q=-2$$

となるから，求める $f(x)$ の式は

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{2}(x-4)^2-2} \quad \textbf{（答）}$$

◀y 軸と点 $(0,\ 6)$ で交わるから
$f(0)=6$
x 軸と点 $(2,\ 0)$ で交わるから
$f(2)=0$

解　説

1　(1)の計算の工夫

「**解答**」のように素直に計算しても大した計算量ではないが，式の対称性に注目した計算の工夫を紹介しておこう。

$$f(x)=(x+1)(x+2)+(x+1)(x+3)+(x+2)(x+3)$$

において，$x+2=X$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x)&=(X-1)X+(X-1)(X+1)+X(X+1)\\ &=(X^2-X)+(X^2-1)+(X^2+X)\\ &=3X^2-1 \end{aligned}$$

したがって

$$f(x)=3(x+2)^2-1$$

2 **(2)の補足と別解**

「**解答**」では，軸の位置がグラフから読みとれることに注目して，平方完成された形

$$y=a(x-p)^2+q$$

で文字をおいて考えた。このときは当然ながら，求める $f(x)$ の式は平方完成された

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-4)^2-2 \quad \cdots\cdots(*)$$

という形で得られる。そこで，最後にこれを展開して

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+6$$

という形で答えとしてもよいが，「平方完成された形」というのはすでに整理された形なのだから，「**解答**」のように(*)をそのまま答えとして差し支えない。

なお，初めに文字をおくとき，展開された形で

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

のようにおくのも有力であるから紹介しておこう。

この場合は，「2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフの軸の位置は

$$x=-\frac{b}{2a}$$

と表される」ということを使うと見通しがよい。

すなわち，「$y=ax^2+bx+c$ のグラフの軸が $x=4$ である」という条件は

$$-\frac{b}{2a}=4 \quad (\text{つまり，} b=-8a)$$

と表すことができるので，①の代わりに

$$y=ax^2-8ax+c \quad \cdots\cdots①'$$

を $f(x)$ の式として，この①′に $(x,\ y)=(0,\ 6)$，$(2,\ 0)$ を代入していけばよい。あとは「**解答**」と同様であり，a，c の連立方程式を解いて $f(x)$ の係数を得る流れである。