問題

■演習

★★

【1】(1) 数列 $\{a_n\}$ が

$$\frac{5n^2+5n-3}{n^2+n} < a_n < \frac{5^{n+1}+4^{n-1}}{5^n} \quad (n=1,\,2,\,\cdots)$$

をみたすとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na^n$ (a は $0<a<1$ の定数) を求めたい．

(i) $a=\dfrac{1}{1+b}$ $(b>0)$ とおき，二項定理を用いることにより，不等式

$$0 < na^n < \frac{2}{(n-1)b^2} \quad (n=2,\,3,\,\cdots)$$

が成り立つことを示せ．

(ii) (i) の不等式を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na^n$ $(0<a<1)$ を求めよ．

★★

【2】不等式を作ることにより，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_x(x+x^2)$ を求めよ．

★

【3】次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x^2)}{2x^2}$

ただし，(4) の対数は自然対数である．

★★★
【4】a_1 と a_2 を正の実数とし，$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n-1}a_k$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ により数列 $\{a_n\}$ を，また $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により数列 $\{b_n\}$ を定める．

(1) $n \geqq 3$ のとき，3 つの数 a_{n+1}，a_n，a_{n-1} の関係を式で表せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ が収束し，極限値 $\lim_{n\to\infty} b_n$ をもつと仮定したとき，この極限値を求めよ．

(3) (2) で求めた値を c とすると，不等式 $|b_{n+1}-c| \leqq \dfrac{|b_n-c|}{c}$ $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ が成り立つことを示し，数列 $\{b_n\}$ の極限値が c であることを証明せよ．

★★★
【5】数列 $\{a_n\}$ が $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$ をみたすとき，「単調増加」であるという．また，数列 $\{a_n\}$ において，$a_n \leqq M$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ をみたす定数 M が存在するとき，$\{a_n\}$ は「上に有界」であるといい，一般に，**単調増加かつ上に有界な数列は収束すること**が知られている．

さて，$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ について，以下の (1)，(2) を証明せよ．

(1) $a_n<a_{n+1}$　　(2) $a_n<3$