式の計算の利用

解答解説（基本問題）

問題

【1】因数分解を利用して，87^2-13^2 を計算しなさい。

【2】展開を利用して，次の計算をしなさい。

(1)　103^2　　　　(2)　72×68

【3】次の式の値を求めなさい。

(1)　$x=29$ のとき，$(x-5)(x+9)-(x+3)(x-3)$ の値

(2)　$x=5.15$，$y=4.85$ のとき，x^2-y^2 の値

【4】「1，3，5」，「2，4，6」のように，2 ずつ大きくなる 3 つの整数では，まん中の整数の 2 乗は，残りの 2 つの整数の積より 4 大きい。このことを証明しなさい。

解説

【1】

87^2-13^2

$=(87+13)\times(87-13)$

$=100\times 74$

$=$ **7400**

◀ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

【2】(1)

103^2

$=(100+3)^2$

$=100^2+2\times 100\times 3+3^2$

$=10000+600+9$

$=$ **10609**

◀ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(2)

72×68

$=(70+2)\times(70-2)$

$=70^2-2^2$

$=4900-4$

$=$ **4896**

◀ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

【3】(1)　$(x-5)(x+9)-(x+3)(x-3)$

$=x^2+4x-45-(x^2-9)$

$=x^2+4x-45-x^2+9$

$=4x-36$

$=4(x-9)$

これに，$x=29$ を代入すると

$4(x-9)=4\times(29-9)$

$=4\times20$

$=\mathbf{80}$

(2)　x^2-y^2

$=(x+y)(x-y)$

これに，$x=5.15$，$y=4.85$ を代入すると

$(x+y)(x-y)=(5.15+4.85)\times(5.15-4.85)$

$=10\times0.3$

$=\mathbf{3}$

【4】まん中の整数を n とすると，2 ずつ大きくなる 3 つの整数は

$n-2$，　n，　$n+2$

と表されるので，まん中の整数の 2 乗から残りの 2 つの整数の積をひくと

$n^2-(n-2)(n+2)=n^2-(n^2-4)$

$=n^2-n^2+4$

$=4$

したがって，2 ずつ大きくなる 3 つの整数では，まん中の整数の 2 乗は，残りの 2 つの整数の積より 4 大きい。　**(証明終)**

◀ $(x-5)(x+9)$ と $(x+3)(x-3)$ をそれぞれ展開する。

◀ 4 でくくる。

◀ a^2-b^2
$=(a+b)(a-b)$

◀ 3 つの整数を
n，$n+2$，$n+4$
とおいて考えてもよい。

◀ $(a+b)(a-b)$
$=a^2-b^2$

解答

【1】7400

【2】(1)　**10609**　　(2)　**4896**

【3】(1)　**80**　　(2)　**3**

【4】解説参照

解答解説（基本問題）つづき

問題

【5】次の各問いに答えなさい。

⑴　126にできるだけ小さい正の整数をかけて，ある正の整数の 2 乗にするには，どのような数をかければよいですか。

⑵　480をできるだけ小さい正の整数でわって，ある正の整数の 2 乗にするには，どのような数でわればよいですか。

【6】1 辺の長さが x cmの正方形がある。この正方形の縦を 4 cm長くし，横を 4 cm短くして長方形をつくる。このとき，もとの正方形の面積は，辺の長さを変えてできた長方形の面積と比べてどれだけ大きいですか。

【7】2 つの正の整数 a，b を 8 でわると，余りはそれぞれ 2，4 になる。このとき，ab は 8 の倍数であることを証明しなさい。

解説

【5】⑴　126を素因数分解すると

$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

これに正の整数 n をかけて，ある正の整数の 2 乗にするには

$$126 \times n = 2 \times 3^2 \times 7 \times n$$

より，$2 \times 7 \times n$ が正の整数の 2 乗になればよい。

よって，求める最も小さい正の整数 n は

$$2 \times 7 = \mathbf{14}$$

◀
$$\begin{array}{r|l} 2 & 126 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

⑵　480を素因数分解すると

$$480 = 2^5 \times 3 \times 5$$

これを正の整数 n でわると

$$\frac{480}{n} = \frac{2^5 \times 3 \times 5}{n}$$

$$= \frac{(2 \times 2)^2 \times 2 \times 3 \times 5}{n}$$

よって，求める最も小さい正の整数 n は

$$2 \times 3 \times 5 = \mathbf{30}$$

◀
$$\begin{array}{r|l} 2 & 480 \\ \hline 2 & 240 \\ \hline 2 & 120 \\ \hline 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

【6】もとの正方形の面積は

$$x^2\text{cm}^2$$

辺の長さを変えてできた長方形の縦と横の長さは

縦；$(x+4)$ cm

横；$(x-4)$ cm

よって，もとの正方形の面積から長方形の面積をひくと

$$\begin{aligned} & x^2-(x+4)(x-4) \\ =& x^2-(x^2-16) \\ =& x^2-x^2+16 \\ =& 16\ (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

◀ $(a+b)(a-b)$
$=a^2-b^2$

したがって，もとの正方形の面積は，辺の長さを変えてできた長方形の面積より**16 cm^2**大きい。

【7】m，n をそれぞれ 0 以上の整数とすると，2 つの正の整数 a，b はそれぞれ

$$a=8m+2$$
$$b=8n+4$$

と表される。このとき，ab は

$$\begin{aligned} ab &= (8m+2)\times(8n+4) \\ &= 2(4m+1)\times4(2n+1) \\ &= 8(4m+1)(2n+1) \end{aligned}$$

ここで，m，n は 0 以上の整数であるから，$4m+1$ と $2n+1$ は整数である。よって，$(4m+1)(2n+1)$ も整数である。

したがって，ab は 8 の倍数である。　**（証明終）**

◀整数 A を整数 B でわったとき，商が C，余りが D ならば
$A=B\times C+D$
（D は 0 以上 B 未満の整数）

◀ $8m+2$ を 2 でくくり，$8n+4$ を 4 でくくる。

◀ 8×(整数)の形で表される。

◀整数と整数の積は整数。

解答

【5】(1)　**14**　　(2)　**30**

【6】**16 cm^2**

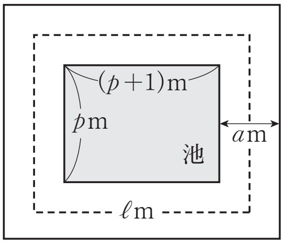
【7】**解説参照**

解答解説（応用問題）

問題

【1】2つの整数 x，y について，$A=x+4y$，$B=2x-y$ とするとき，A^2+2B^2 が9の倍数であることを証明しなさい。

【2】右の図のように，縦 p m，横 $(p+1)$ mの長方形の池のまわりに，幅 a mの道がついている。この道の面積を S m^2，道のまん中を通る線の長さを ℓ mとするとき，$S=a\ell$ が成り立つことを証明しなさい。



【3】工夫して，次の計算をしなさい。

(1)　$3.5^2\times1.414-1.5^2\times1.414$　　　(2)　$101^2-51^2+49^2$

解説

【1】
$$
\begin{aligned}
&A^2+2B^2\\
&=(x+4y)^2+2(2x-y)^2\\
&=x^2+8xy+16y^2+2(4x^2-4xy+y^2)\\
&=x^2+8xy+16y^2+8x^2-8xy+2y^2\\
&=9x^2+18y^2\\
&=9(x^2+2y^2)
\end{aligned}
$$

◀ $A=x+4y$，$B=2x-y$ を代入する。

◀ 9×(整数)の形で表される。

ここで，x，y はともに整数であるから，x^2+2y^2 も整数である。
したがって，A^2+2B^2 は9の倍数である。　**（証明終）**

【2】幅 a mの道の面積 S は
$$
\begin{aligned}
S&=(p+2a)(p+1+2a)-p(p+1)\\
&=p^2+p+2ap+2ap+2a+4a^2-p^2-p\\
&=4ap+4a^2+2a \quad\cdots\cdots\text{①}
\end{aligned}
$$

◀道と池を合わせた面積から，池の面積をひく。

道のまん中を通る線の長さ ℓ は
$$
\begin{aligned}
\ell&=\left\{\left(p+\frac{a}{2}\times2\right)+\left(p+1+\frac{a}{2}\times2\right)\right\}\times2\\
&=(p+a+p+1+a)\times2\\
&=(2p+2a+1)\times2\\
&=4p+4a+2 \quad\cdots\cdots\text{②}
\end{aligned}
$$

◀ (長方形の周の長さ)＝{(縦の長さ)＋(横の長さ)}×2

①，②より

$$S = 4ap + 4a^2 + 2a$$
$$= a(4p + 4a + 2)$$
$$= a\ell$$ （証明終）

【3】(1)　$3.5^2 \times 1.414 - 1.5^2 \times 1.414$

$= 1.414 \times (3.5^2 - 1.5^2)$

$= 1.414 \times (3.5 + 1.5) \times (3.5 - 1.5)$

◀ $a^2 - b^2$
$= (a+b)(a-b)$

$= 1.414 \times 5 \times 2$

$=$ **14.14**

(2)　$101^2 - 51^2 + 49^2$

$= (100 + 1)^2 - (51^2 - 49^2)$

$= 100^2 + 2 \times 100 \times 1 + 1^2 - (51 + 49) \times (51 - 49)$

◀ $(a+b)^2$
$= a^2 + 2ab + b^2$,
$a^2 - b^2$
$= (a+b)(a-b)$

$= 10000 + 200 + 1 - 100 \times 2$

$= 10000 + 200 + 1 - 200$

$=$ **10001**

解答

【1】解説参照

【2】解説参照

【3】(1)　**14.14**　　(2)　**10001**

問題

【4】縦が $2x$ m，横が x m の長方形の花だんがある。この花だんの縦を 3 m 縮め，横を 4 m 広げると，面積がもとの花だんより 18m^2 大きくなるという。このとき，もとの花だんの縦の長さを求めなさい。

【5】右の図のような 3 つの長方形ABCD，ECFG，AHGIがあり

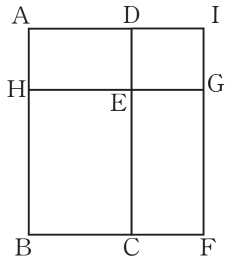
$AB = 2a$ cm，$BC = a$ cm，

$FG = 2b$ cm，$CF = b$ cm

である。3 つの長方形ABCD，ECFG，AHGIの面積をそれぞれ S，S'，T とするとき

$$T = S - S'$$

が成り立つことを証明しなさい。ただし，$a > b$ とする。



【6】連続する 4 つの整数について，大きい方の 2 数の積から小さい方の 2 数の積をひいた結果は，これらの 4 つの整数の和になることを証明しなさい。

【7】$x + y = 5$，$xy = -3$ のとき，$x^2 + 3xy + y^2$ の値を求めなさい。

解説

【4】新しい花だんの面積からもとの花だんの面積をひくと

$$\begin{aligned}&(2x-3)(x+4) - 2x \times x\\ &= 2x^2 + 8x - 3x - 12 - 2x^2\\ &= 5x - 12 \ (\text{m}^2)\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}5x - 12 &= 18\\ 5x &= 30\\ x &= 6\end{aligned}$$

これは，$2x > 3$ をみたす。したがって，もとの花だんの縦の長さは

$2x = 2 \times 6 =$ **12（m）**

◀新しい花だんの縦と横の長さは
縦；$(2x-3)$ m
（ただし，$2x > 3$）
横；$(x+4)$ m

【5】長方形ABCDの面積 S は

$$S = 2a \times a = 2a^2 \ (\text{cm}^2)$$

長方形ECFGの面積 S' は

$$S' = 2b \times b = 2b^2 \ (\text{cm}^2)$$

よって，

$$S-S'=2a^2-2b^2 \ (\mathrm{cm}^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

また，長方形AHGIの面積Tは

$$\begin{aligned} T&=(2a-2b)(a+b)\\ &=2(a-b)(a+b)\\ &=2(a^2-b^2)\\ &=2a^2-2b^2 \ (\mathrm{cm}^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{aligned}$$

◀長方形AHGIの縦と横の長さは
縦；$(2a-2b)$ cm
横；$(a+b)$ cm

したがって，①，②より

$T=S-S'$　**(証明終)**

【6】最も小さい整数を n とすると，連続する 4 つの整数は

n，　$n+1$，　$n+2$，　$n+3$

と表される。このとき，大きい方の 2 数の積から小さい方の 2 数の積をひくと

$$\begin{aligned} &(n+2)(n+3)-n(n+1)\\ &=n^2+5n+6-n^2-n\\ &=4n+6\\ &=n+(n+1)+(n+2)+(n+3) \end{aligned}$$

◀$4n$を$n+n+n+n$，6を$1+2+3$と考えるのがポイント。

よって，連続する 4 つの整数について，大きい方の 2 数の積から小さい方の 2 数の積をひいた結果は，これらの 4 つの整数の和になる。　**(証明終)**

【7】

$$\begin{aligned} x^2+3xy+y^2&=x^2+2xy+y^2+xy\\ &=(x+y)^2+xy \end{aligned}$$

◀$3xy$を$2xy+xy$と考え，さらに
$(x^2+2xy+y^2)+xy$
と考えるのがポイント。

これに，$x+y=5$，$xy=-3$ を代入すると

$$\begin{aligned} (x+y)^2+xy&=5^2+(-3)\\ &=25-3\\ &=\mathbf{22} \end{aligned}$$

解答

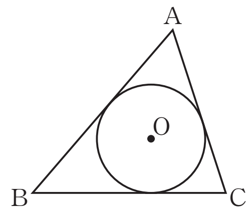
【4】12 m　**【5】解説参照**

【6】解説参照　**【7】22**

問題

【8】a は 7 でわると 5 余る正の整数で，b は 7 でわると 2 余る正の整数である。このとき，a^2+b^2-ab を 7 でわったときの余りを求めなさい。

【9】右の図のような△ABCと，その 3 辺に接する円Oがある。△ABCの面積をS cm^2，△ABCの周の長さを ℓ cm，円Oの半径を r cmとするとき，Sを ℓ，r を用いた最も簡単な式で表しなさい。



解説

【8】m，nをそれぞれ 0 以上の整数とすると，2 つの正の整数 a，b はそれぞれ

$$a=7m+5$$
$$b=7n+2$$

と表される。このとき，a^2+b^2-ab は

$$\begin{aligned}&a^2+b^2-ab\\&=(7m+5)^2+(7n+2)^2-(7m+5)(7n+2)\\&=49m^2+70m+25+49n^2+28n+4-(49mn+14m+35n+10)\\&=49m^2+70m+25+49n^2+28n+4-49mn-14m-35n-10\\&=49m^2+56m+49n^2-7n-49mn+19\\&=7(7m^2+8m+7n^2-n-7mn+2)+5\end{aligned}$$

ここで，m，nは 0 以上の整数であるから，$7m^2+8m+7n^2-n-7mn+2$ は整数である。したがって，a^2+b^2-ab を 7 でわったときの余りは**5** である。

◀整数Aを整数Bでわったとき，商がC，余りがDならば
$A=B\times C+D$
（Dは 0 以上 B未満の整数）

◀ $19=7\times2+5$
次頁のPointを参照。

【9】点Oから辺AB，BC，CAに下ろした垂線をそれぞれOP，OQ，ORとする。このとき，辺AB，BC，CAと円Oはそれぞれ接しているので

OP⊥AB，　OQ⊥BC，　OR⊥CA

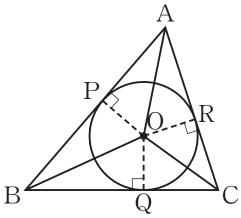
◀円の接線は，その接点を通る半径に垂直である。

よって,

$$\triangle \mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times \mathrm{AB}\times \mathrm{OP}$$

$$\triangle \mathrm{OBC}=\frac{1}{2}\times \mathrm{BC}\times \mathrm{OQ}$$

$$\triangle \mathrm{OCA}=\frac{1}{2}\times \mathrm{CA}\times \mathrm{OR}$$



したがって,

$$\begin{aligned}S&=\triangle \mathrm{OAB}+\triangle \mathrm{OBC}+\triangle \mathrm{OCA}\\&=\frac{1}{2}\times \mathrm{AB}\times \mathrm{OP}+\frac{1}{2}\times \mathrm{BC}\times \mathrm{OQ}+\frac{1}{2}\times \mathrm{CA}\times \mathrm{OR}\\&=\frac{1}{2}\times \mathrm{AB}\times r+\frac{1}{2}\times \mathrm{BC}\times r+\frac{1}{2}\times \mathrm{CA}\times r\\&=\frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})r\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\ell r}\end{aligned}$$

◀ $\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=\mathrm{OR}=r$

◀ △ABCの周の長さはℓなので
$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}=\ell$

Point

★【8】の答えが「19」とならない理由

【8】において,「余りは19」と答えてはいけません。なぜならば,余りはわる数より小さい整数である必要があるからです。

一般に,整数Aを整数Bでわったとき,商がC,余りがDならば

$$A=B\times C+D \quad (D\text{は }0\text{ 以上}B\text{未満の整数})$$

と表されます。

したがって,$7N+19$(Nは整数)を7でわると

$$7N+19=7(N+2)+5$$

と表されることより,余りは5となります。

解答

【8】5

【9】$S=\frac{1}{2}\ell r$