

高校数学へようこそ 2回目

要点学習

QMT4V1-H1J2-01

素直に計算してはダメ

高校数学では、中学と比べて扱う式が複雑になる分、計算量がすごく増えます。そのため、素直に計算しては、時間がたりませんし、ミスをしやすくなります。

【例題】

次の各問いに答えよ。

(1) $(x+y)^3$ を計算せよ。

(2) $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ のとき, x^3+y^3 の値を求めよ。

【解答】

$$\begin{aligned} (1) \quad (x+y)^3 &= (x+y)^2(x+y) \\ &= (x^2+2xy+y^2)(x+y) \\ &= x^3+x^2y+2x^2y+2xy^2+xy^2+y^3 \\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) 【素直な(2)の解答】

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}+\sqrt{2})^3 &= (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ &= \{(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2\}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ &= (5+2\sqrt{6})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ &= 5\sqrt{3}+5\sqrt{2}+6\sqrt{2}+4\sqrt{3} \\ &= 9\sqrt{3}+11\sqrt{2} \\ (\sqrt{3}-\sqrt{2})^3 &= (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2}) \\ &= \{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2\}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \\ &= (5-2\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \\ &= 5\sqrt{3}-5\sqrt{2}-6\sqrt{2}+4\sqrt{3} \\ &= 9\sqrt{3}-11\sqrt{2} \\ \therefore x^3+y^3 &= 18\sqrt{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【スマートな(2)の解答】

$$\begin{aligned} x+y &= (\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3} \\ xy &= (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=1 \\ \text{と(1)の結果より} \\ x^3+y^3 &= (x+y)^3-3x^2y-3xy^2 \\ &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= (2\sqrt{3})^3-3\cdot 1\cdot 2\sqrt{3} \\ &= 18\sqrt{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

◀ この式は $(x+y)^3$ の展開公式として覚えておきましょう。

◀ 「 $\cdot$ 」はかけ算の記号「 $\times$ 」と同じ意味です。高校ではこのように書くことが多くなります。

◀ 「 $\therefore$ 」は「よって」という意味を表す記号です。高校数学でよく登場します。ちなみに、逆向きの「 $\because$ 」は「なぜならば」という意味を表します。

◀ $x+y$, xy の値がきれいになることと、(1)の結果に「 x^3+y^3 」が出てきたことを利用します。

◀ (1)の結果から $3x^2y$ と $3xy^2$ を移項。

いかがでしょうか。【スマートな(2)の解答】では

- ・(1)の結果を利用している
- ・ $x+y$, xy の値がきれいな値になることを利用している

によって、計算量をぐんと減らしていますね。計算量を減らすと、時間だけでなく、ミスの可能性を大きく減らすことができます。ややこしい計算をするときは、「もっと簡単にできないか?」と考える癖をつけましょう。

【参考】

例題の x^3+y^3 は、 x と y を入れ替えても値が変わらない式なので次の性質があります。

x と y を入れ替えても値が変わらない式を「 x と y の対称式」といい
 ・ x と y の対称式は「 $x+y$ 」と「 xy 」の式で表せる
 という性質がある。

たとえば、 $x^2y-xy+xy^2$ は x と y を入れ替えても元の式と等しくなるので対称式。

$$x^2y-xy+xy^2 \rightarrow y^2x-yx+yx^2 = x^2y-xy+xy^2$$

x と y を入れ替える 元の式と等しい

そして、対称式の性質どおり、 $x+y$ と xy の式に変形できる。

$$x^2y-xy+xy^2 = xy(x-1+y) = xy\{(x+y)-1\}$$

対称式を扱う上で、とくによく登場するのが次の2つの式です。

- ① $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ ← $(x+y)^2$ の展開公式より
- ② $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ ← 例題の(1)の結果より

例題の(2)ではこの②の式を利用しました。対称式を見たら、 $x+y$ と xy のような和と積の利用を考えてみましょう。

✓ チェック

$x=\sqrt{5}+1$, $y=\sqrt{5}-1$ のとき、次の式の値を求めよ。

- (1) x^2+y^2
- (2) x^4+y^4
- (3) $x^3+y^3-xy^2-x^2y$

解 答

$$(1) \quad \begin{aligned} x+y &= (\sqrt{5}+1) + (\sqrt{5}-1) = 2\sqrt{5} \\ xy &= (\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1) = (\sqrt{5})^2 - 1^2 = 4 \end{aligned}$$

と

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

より

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \\ &= (2\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 4 \\ &= 12 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) (1)の結果の

$$x^2 + y^2 = 12$$

の両辺を2乗すると

$$(x^2 + y^2)^2 = 12^2$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 144$$

$$\therefore x^4 + y^4 = 144 - 2(xy)^2$$

となるので

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= 144 - 2(xy)^2 \\ &= 144 - 2 \cdot 4^2 \\ &= 112 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad x^3 + y^3 - xy^2 - x^2y &= (x^3 - x^2y) + (y^3 - xy^2) \\ &= x^2(x-y) + y^2(y-x) \\ &= (x^2 - y^2)(x-y) \\ &= (x+y)(x-y)(x-y) \end{aligned}$$

ここで

$$x-y = (\sqrt{5}+1) - (\sqrt{5}-1) = 2$$

より

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - xy^2 - x^2y &= (x+y)(x-y)(x-y) \\ &= 2\sqrt{5} \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 8\sqrt{5} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【別解】

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - xy^2 - x^2y &= \{(x+y)^3 - 3xy(x+y)\} - xy(y+x) \\ &= (x+y)^3 - 4xy(x+y) \\ &= (2\sqrt{5})^3 - 4 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{5} \\ &= 8\sqrt{5} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

◀ $x+y$, xy の値がきれいになることと, $(x+y)^2$ の展開公式を利用します。

◀ 【参考】の①の式。

◀ (1)の結果を利用します。

◀ $x-y$ の値もきれいな値なので利用します。

◀ 【参考】の②の式。

高校数学へようこそ 2回目

添削問題

QMT4V1-H1A2-01

※ここからは『Z Study 解答用紙編』の数学「高校数学へようこそ」2枚目にご記入ください。

2

次の各問いに答えよ。(配点 50)

- (1) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ を展開せよ。(5点)
- (2) $x = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ のとき, 次の式の値を求めよ。
 - (i) x^2+y^2 (10点)
 - (ii) x^6+y^6 (15点)
- (3) $x+y=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $x-y=1+\sqrt{6}$ のとき, 次の式の値を求めよ。
 - (i) x^2+y^2 (10点)
 - (ii) $(x^3-1)(y^3-1)$ (10点)

高校数学へようこそ 2回目

添削問題 解答解説

QMT4V1-H1C2-01

2 次の各問いに答えよ。(配点 50)

(1) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ を展開せよ。(5点)(2) $x = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。(i) x^2+y^2 (10点)(ii) x^6+y^6 (15点)(3) $x+y=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $x-y=1+\sqrt{6}$ のとき、次の式の値を求めよ。(i) x^2+y^2 (10点)(ii) $(x^3-1)(y^3-1)$ (10点)

攻略点

(1) 素直に展開すればよい。

(2) (i)はそのまま代入しても計算できるが、(ii)をそのまま計算するのは大変。そこで

・(i)も(ii)も対称式

・ $x+y$, xy の値がきれい

ということで、 $x+y$ と xy で表す方針で考えよう。さらに、(ii)は、3乗が絡むので(1)が利用できる。

(3) x と y の値を求めてから代入するのは面倒なので工夫しよう。(i)は2乗をつくるために、与えられた2式を2乗すると…。(ii)は対称式なので $x+y$ と xy の値を利用したい。

解 答

$$(1) \quad (x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$= x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3$$

$$= x^3 + y^3 \quad (\text{答})$$

$$(2)(i) \quad x+y = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} = \sqrt{5}$$

$$xy = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

より

$$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

$$= (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 4 \quad (\text{答})$$

◀ $x+y$, xy の値がきれいになることと、 x^2+y^2 が対称式であることを利用する。

$$(ii) \quad (x^3 + y^3)^2 = x^6 + 2x^3y^3 + y^6$$

より

$$\begin{aligned} x^6 + y^6 &= (x^3 + y^3)^2 - 2(xy)^3 \\ &= \{(x+y)(x^2 - xy + y^2)\}^2 - 2(xy)^3 \\ &= \left\{ \sqrt{5} \left(4 - \frac{1}{2} \right) \right\}^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 \\ &= \left(\frac{7\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \\ &= 61 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)(i) $x+y=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$(x+y)^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2$$

$$\therefore x^2 + 2xy + y^2 = 5 + 2\sqrt{6} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x-y=1+\sqrt{6}$ の両辺を 2 乗すると

$$(x-y)^2 = 1 + 2\sqrt{6} + 6$$

$$\therefore x^2 - 2xy + y^2 = 7 + 2\sqrt{6} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①+②より

$$2x^2 + 2y^2 = 12 + 4\sqrt{6}$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 6 + 2\sqrt{6} \quad (\text{答})$$

(ii) ①-②より

$$4xy = -2 \quad \therefore xy = -\frac{1}{2}$$

よって

$$\begin{aligned} &(x^3 - 1)(y^3 - 1) \\ &= x^3y^3 - x^3 - y^3 + 1 \\ &= (xy)^3 - (x^3 + y^3) + 1 \\ &= (xy)^3 - (x+y)(x^2 - xy + y^2) + 1 \\ &= (xy)^3 - (x+y)\{(x^2 + y^2) - xy\} + 1 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot \left\{ (6 + 2\sqrt{6}) - \left(-\frac{1}{2}\right) \right\} + 1 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot \left(\frac{13}{2} + 2\sqrt{6} \right) + 1 \\ &= -\frac{1}{8} - \left(\frac{13\sqrt{3}}{2} + \frac{13\sqrt{2}}{2} + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} \right) + 1 \\ &= -\frac{21\sqrt{3}}{2} - \frac{25\sqrt{2}}{2} + \frac{7}{8} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

◀(1)の結果を利用。

◀(i)で求めた $x^2 + y^2$ も利用する。

◀対称式の性質を利用するために xy を求める。

◀(i)の結果を利用。

会員番号

QRコードで個別管理しているため氏名の記入は不要です。

解答用紙

禁無断転載

Z-KAI

この答案の添削有効期限は 1年 です。

※解答は、濃く、はっきりとご記入ください。

2/4枚目
QMT4V1-H1D2

総得点
35 / 50

高校数学へようこそ 2回目 添削問題

2 QMT4V1-H1C2

次の各問いに答えよ。(配点 50)

(1) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ を展開せよ。(5点)

(2) $x = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(i) x^2+y^2 (10点)

(ii) x^6+y^6 (15点)

(3) $x+y=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $x-y=1+\sqrt{6}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(i) x^2+y^2 (10点)

(ii) $(x^3-1)(y^3-1)$ (10点)

$$\begin{aligned} (1) & (x+y)(x^2-xy+y^2) \\ &= x^3-xy^2+xy^2-x^2y+y^3 \\ &= x^3+y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2)(i) \quad x^2 &= \frac{5+2\sqrt{15}+3}{4} = \frac{4+\sqrt{15}}{2} \\ y^2 &= \frac{5-2\sqrt{15}+3}{4} = \frac{4-\sqrt{15}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{よって } x^2+y^2 = 4$$

$$(ii) \quad x^6+y^6 = (x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$$

$$(i) \text{より } x^4 = \left(\frac{4+\sqrt{15}}{2}\right)^2 = \frac{16+8\sqrt{15}+15}{4} = \frac{31+8\sqrt{15}}{4}$$

x^4+y^4 についても

$$x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2$$

$$= (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2$$

を利用すると
簡単です。

$$\text{よって } x^4+y^4 = \frac{31}{2}$$

$$\text{また } x^2y^2 = \frac{16-15}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^6+y^6 &= 4\left(\frac{31}{2} - \frac{1}{4}\right) = 4 \times \frac{61}{4} \\ &= 61 \end{aligned}$$

+10

計算ミス

確認してみましょう。

添削者指導欄

x^2+y^2 は対象式なので
「攻略点」にあるように、
 $x+y$ と xy で表す方針
でも考えてみましょう。

(1)を利用してうまく変形
できました。

(1)より

$$\begin{aligned} X^3+Y^3 &= (X+Y)(X^2-XY+Y^2) \end{aligned}$$

が成り立つので、

$X=x^2$, $Y=y^2$
としたのですね。

答 案 感 想 欄	添削者からのオススメ復習用教材	
(1)の式を(2)で利用することに気づいたときは感動しました。	要点学習の2回目チェック	
	添 削 者 よ り (1)の式の利用によく気づきました！ 数学ではこのように前の小問が次の問題のヒントになっていることが多いので注意しましょう。 xとyを入れ替えても変わらない式を「xとyの対称式」といいます。 対称式は$x+y$とxyで表せるので、これを用いて計算量を減らすことが本問のポイントでした。	添削者名 三島
解答時間 [20] 分		

(3)(i) $x+y$ を2乗すると ←

$$x^2 + 2xy + y^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$x-y$ を2乗すると ←

$$x^2 - 2xy + y^2 = 1 + 2\sqrt{6} + 6 = 7 + 2\sqrt{6} \quad \cdots \textcircled{2}$$

①+②より

$$2x^2 + 2y^2 = 12 + 4\sqrt{6}$$

$$\therefore \underline{x^2 + y^2 = 6 + 2\sqrt{6}}$$

2乗をつくるために与えられた式を2乗することがポイント。
よくできました。

(ii) $x+y$ を3乗すると

$$(x+y)(x^2+2xy+y^2) = (\sqrt{3}+\sqrt{2})(5+2\sqrt{6})$$

$$\rightarrow \underline{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 = 9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}$$

$x-y$ を3乗すると

$$(x-y)(x^2-2xy+y^2) = (1+\sqrt{6})(7+2\sqrt{6})$$

$$\rightarrow \underline{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3 = 19+9\sqrt{6}}$$

このあと わかりません。

この2式から $(x^3-1)(y^3-1)$ を導くのは難しいでしょう。
ここでは $(x^3-1)(y^3-1)$ から変形するとよいです。つまり

$$(x^3-1)(y^3-1) = x^3y^3 - (x^3+y^3) + 1$$

なので、この右辺を $x+y$ と xy で表します。
 x^3+y^3 では、(1)の結果が利用できますね。

