

入試数学を知る 2 回目

要点学習

QMT5V3-S1J2-01

相加・相乗平均の関係

今回は不等式の証明の応用として、相加平均と相乗平均の大小関係(相加・相乗平均の関係)を取り上げます。最大・最小問題などで登場することもあります。証明問題として出題されることも多いので、自在に使いこなせるようにしておきましょう。

$a > 0, b > 0$ のとき、相加平均 $\frac{a+b}{2}$ と相乗平均 $\sqrt{ab}$ の間には、次の大小関係が成り立つ

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{ただし、等号が成り立つのは } a=b \text{ のとき})$$

なお、この関係式は

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

の形で適用することも多いので、こちらも合わせて覚えておきましょう。

【例題 1】

$x > 0, y > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか調べよ。

$$(2x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y}\right) \geq \frac{9}{2}$$

【解答】

与えられた不等式の左辺を展開すると

$$\begin{aligned} (2x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y}\right) &= 2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

ここで、 $x > 0, y > 0$ より

$$\frac{x}{y} > 0, \frac{y}{x} > 0$$

だから、相加・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{5}{2} &\geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} + \frac{5}{2} \\ &= 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

(証明終)

そして、等号が成り立つのは

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \quad \text{すなわち} \quad x^2 = y^2$$

より

$$x=y \text{ のとき (答)}$$

◀ $\frac{x}{y}$ と $\frac{y}{x}$ のように、積に文字が現れない2数に着目するのがポイントです。

◀ 必ず確認するようにしましょう。

◀ 等号成立条件を求めます。

【例題2】

$a > 0$ のとき、 $2a + \frac{1}{3a}$ のとり得る値の最小値と、そのときの a の値をそれぞれ求めよ。

【解答】

$a > 0$ のとき

$$2a > 0, \frac{1}{3a} > 0$$

だから、相加・相乗平均の関係より

$$2a + \frac{1}{3a} \geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{3a}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

ここで、等号が成り立つのは

$$2a = \frac{1}{3a} \quad \text{すなわち} \quad 6a^2 = 1$$

より

$$a = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

のときである。

以上より、求める最小値と、そのときの a の値は

$$\text{最小値} : \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad \left(a = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ のとき} \right) \quad (\text{答})$$

◀必ず確認するようにしましょう。

◀最小となるときの a の値を求めるために、等号成立条件を求めます。

✓ チェック

次の各問いに答えよ。

- (1) $a > 0$, $b > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか調べよ。

$$(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$$

(徳島大. 改)

- (2) $a > 0$ のとき、 $a + \frac{17}{a+4}$ は $a = \boxed{\text{キ}}$ において最小値 $\boxed{\text{ク}}$ をとる。

(東海大)

解 答

- (1) 与えられた不等式の左辺を展開すると

$$\begin{aligned}(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) &= 1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1 \\ &= \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\end{aligned}$$

ここで、 $a>0$ 、 $b>0$ より

$$\frac{a}{b}>0, \quad \frac{b}{a}>0$$

だから、相加・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2 &\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2 \\ &= 2+2=4\end{aligned}$$

そして、等号が成り立つのは

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a} \quad \text{すなわち} \quad a^2=b^2$$

より

$a=b$ のとき (答)

- (2) 与えられた式を変形すると

$$a+\frac{17}{a+4}=a+4+\frac{17}{a+4}-4$$

ここで、 $a>0$ のとき

$$a+4>0, \quad \frac{17}{a+4}>0$$

だから、相加・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}a+4+\frac{17}{a+4}-4 &\geq 2\sqrt{(a+4)\cdot\frac{17}{a+4}}-4 \\ &= 2\sqrt{17}-4\end{aligned}$$

そして、等号が成り立つのは

$$a+4=\frac{17}{a+4} \quad \text{すなわち} \quad (a+4)^2=17$$

より

$$a=\sqrt{17}-4$$

のときである。

以上より、求める a の値と最小値は

$$\text{キ: } \sqrt{17}-4, \quad \text{ク: } 2\sqrt{17}-4 \quad (\text{答})$$

◀ 積に文字が現れない $\frac{a}{b}$ と $\frac{b}{a}$ の2数に着目します。

◀ 必ず確認するようにしましょう。

(証明終)

◀ 等号成立条件を求めます。

◀ 積に文字が現れないように、分母の $a+4$ と同じものをつくる方針で変形するのがポイントです。

◀ 最小となるときの a の値を求めるために、等号成立条件を求めます。

入試数学を知る 2回目

添削問題

QMT5V3-H1A2-01

※ここからは『Z Study 解答用紙編』の数学「入試数学を知る」2枚目にご記入ください。

2

次の各問いに答えよ。(配点 50)

- (1) $a > 0$, $b > 0$ のとき, 次の不等式が成り立つことを証明せよ。また, 等号が成り立つのはどのようなときか調べよ。

(i) $\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \geq \sqrt{2}$ (15 点)

(ii) $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) \geq 9$ (15 点)

- (2) $x > -2$ のとき, $x + \frac{9}{x+2}$ のとり得る値の最小値と, そのときの x の値をそれぞれ求めよ。(20 点)

入試数学を知る 2回目

添削問題 解答解説

QMT5V3-H1C2-01

2 次の各問いに答えよ。(配点 50)

(1) $a > 0, b > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか調べよ。

(i) $\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \geq \sqrt{2}$ (15 点)

(ii) $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) \geq 9$ (15 点)

(2) $x > -2$ のとき、 $x + \frac{9}{x+2}$ のとり得る値の最小値と、そのときの x の値をそれぞれ求めよ。(20 点)



攻略点

- (1) このタイプの問題では、どの2つの正の数に対して相加・相乗平均の関係を適用するか、がポイントになる。証明する不等式の右辺が定数であることに注意して、積が定数になる2数を探してみると…。
- (2) 与えられた式の形のままで、相加・相乗平均の関係を適用しても右辺が定数にならないため、これが定数になるような工夫が必要である。

解 答

(1)(i) $a > 0$ より

$$\frac{a}{2} > 0, \frac{1}{a} > 0$$

だから、相加・相乗平均の関係より

$$\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(証明終)

そして、等号が成り立つのは

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{a} \quad \text{すなわち} \quad a^2 = 2$$

より

$$a = \sqrt{2} \text{ のとき (答)}$$

(ii) 与えられた不等式の左辺を展開すると

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + 4 + 1 + \frac{4}{ab}$$

$$= ab + \frac{4}{ab} + 5$$

◀必ず確認するようにすること。

◀等号成立条件を求める。

ここで, $a > 0$, $b > 0$ より

$$ab > 0, \frac{4}{ab} > 0$$

だから, 相加・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} ab + \frac{4}{ab} + 5 &\geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} + 5 \\ &= 2 \cdot 2 + 5 = 9 \end{aligned}$$

(証明終)

そして, 等号が成り立つのは

$$ab = \frac{4}{ab} \text{ すなわち } a^2 b^2 = 4$$

より

$$ab = 2 \text{ のとき (答)}$$

(2) 与えられた式を変形すると

$$x + \frac{9}{x+2} = x + 2 + \frac{9}{x+2} - 2$$

ここで, $x > -2$ のとき

$$x + 2 > 0, \frac{9}{x+2} > 0$$

だから, 相加・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} x + 2 + \frac{9}{x+2} - 2 &\geq 2\sqrt{(x+2) \cdot \frac{9}{x+2}} - 2 \\ &= 2 \cdot 3 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

そして, 等号が成り立つのは

$$x + 2 = \frac{9}{x+2} \text{ すなわち } (x+2)^2 = 9$$

より

$$x + 2 = 3$$

$$\therefore x = 1$$

のときである。

以上より, 求める最小値と, そのときの x の値は

$$\text{最小値: } 4 \text{ (} x = 1 \text{ のとき) (答)}$$

◀必ず確認するようにすること。

◀等号成立条件を求める。

◀分母の $x+2$ と同じものをつくる方針で変形するのがポイント。

◀最小となるときの x の値を求めるために, 等号成立条件を求める。

会員番号

QRコードで個別管理しているため氏名の記入は不要です。

解答用紙

禁無断転載

Z-KAI

この答案の添削有効期限は 1年 です。

※解答は、濃く、はっきりとご記入ください。

2/4枚目
QMT5V3-H1D2

総得点
28 / 50

入試数学を知る 2回目 添削問題

2 QMT5V3-H1C2

次の各問いに答えよ。(配点 50)

(1) $a > 0, b > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか調べよ。

(i) $\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \geq \sqrt{2}$ (15点)

(ii) $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) \geq 9$ (15点)

(2) $x > -2$ のとき、 $x + \frac{9}{x+2}$ のとり得る値の最小値と、そのときの x の値をそれぞれ求めよ。(20点)

(1)(i) $a > 0$ だから 相加・相乗平均より

$$\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \geq 2 \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

等号成立は

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{a} \quad \therefore a^2 = 2$$

よって $a = \pm\sqrt{2}$ のとき。 -2 $a > 0$ より $a = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} (ii) \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) - 9 &= ab + \frac{4}{a}b - 4 \\ &= \frac{a^2b^2 - 4ab + 4}{ab} \end{aligned}$$

$$= \frac{(ab - 2)^2}{ab} \geq 0$$

等号成立は $ab = 2$ のとき

$a > 0, b > 0$ より $ab > 0$ だから★において、相加・相乗平均の関係を用いても早いでしょう。

添削者指導欄

きちんと断っておきましょう。また明らかですが、相加・相乗平均を用いたときの前提として

$$\frac{a}{2} > 0, \frac{1}{a} > 0$$

を示しておくのが丁寧です。

証明なので、 $a > 0, b > 0$ より

$$ab > 0$$

を述べてから「 ≥ 0 」を示しましょう。また結論

(左辺) $\geq$ (右辺)

を明記しておいてください。

解答は裏面に続けてかまいません

答 案 感 想 欄	添削者からのオススメ復習用教材
相加・相乗平均は理解できるけれど どういうとき使うのかわかりません。	要点学習2回目チェック(2)
	添 削 者 よ り 相加・相乗平均の関係は不等式の証明だけでなく、最大・最小を求めるときにも用います。とくに“積が一定”や“和が一定”の場合に利用できることが多いので、意識しておくといでしょう。(1)(ii), (2)は相加・相乗平均の関係を用いて解ける問題です。
解答時間 [18] 分	添削者名 三島

どうやって相加・相乗平均の関係を
用いるのかを確認しておきましょう。

$$\begin{aligned}
 (2) \quad x + \frac{9}{x+2} &= \frac{x^2 + 2x + 9}{x+2} \\
 &= \frac{(x+1)^2 + 8}{x+2}
 \end{aligned}$$

$(x+1)^2 + 8$ は $x = -1$ のとき最小値をとる。

$x > -2$ より 最小値は $x = -1$ のときで ~~×~~

$$\frac{8}{1} = 8$$

これは成立しますが、

(分子) が最小 $\xrightarrow{\quad}$ $\frac{(\text{分子})}{(\text{分母})}$ が最小
 $\xleftarrow{\quad}$

であり、(分子) が最小になるとき、 $\frac{(\text{分子})}{(\text{分母})}$ が最小とは限りません。

関数の最大・最小を考えるときは
 関数の一部分だけを見て
 最大・最小を考えてはいけな
 ことを理解しておいてください。

相加・相乗平均の関
係が利用できないか考
えてみましょう。 $\frac{9}{x+2}$ の分
母に注目して積が定数
になる2つの式ができ
るように変形するのがコ
ツです。

