分かると快感！

Z会ナビ

▶算数　理科　歴史　地理

お題

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\cdots=?$$

（大阪市立大　2014年度　数学）

次の計算をしなさい。

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\cdots$$

つまり、$\frac{1}{4}$を次々にかけてできる無限個の数の和を求めなさい。

無限個の数の和

$\frac{1}{4}$を次々にかけていくと

$$\frac{1}{4}、\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}、\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}、\cdots$$

となって、いくらでも多くの数が作れますね。このようにしてできる無限個の数をすべてたすとどうなるか、というのが今回の問題です。

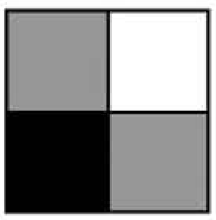
たとえば、前から順に

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$$

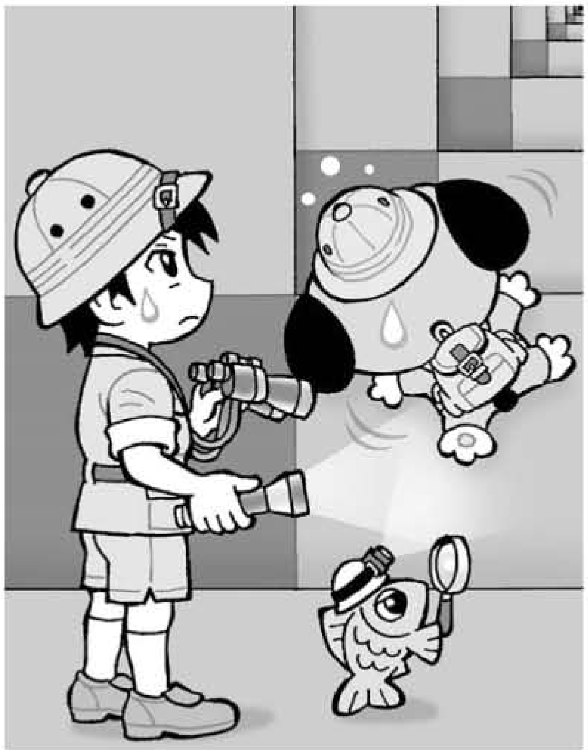
$$\frac{5}{16}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{21}{64}$$

のようにたしていく方法では、無限個の数のたし算はいつまでたっても終わりません。そこで、今回は、正方形の面積を考えるという工夫で無限個の数の和を求めましょう。

正方形の面積の和を考える

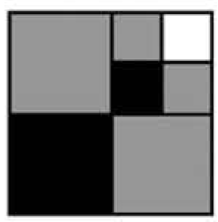


右の図のように、一辺の長さが1㍍、面積が1平方㍍の正方形を四つに分けることを考えてみましょう。左下の正方形を黒色に、左上と右下の正方形を灰色に、塗っておきます。このとき、左下の黒色の正方形の面積は、元の正方形の面積の$\frac{1}{4}$倍なので、$\frac{1}{4}$平方㍍となります。

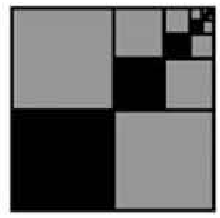


イラスト・瑞木匠

面積に置き換える



次に、右上の白色の正方形をさらに四つに分けます。さっきと同じように、左下の正方形を黒色に、左上と右下の正方形を灰色に塗っておきます。すると、新しくできた黒色の正方形の面積は、さっきの黒色の正方形の面積の$\frac{1}{4}$倍なので、$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$平方㍍となります。このあとも、同じように、右上の白色の正方形を四つに分けて、左下の正方形を黒色に、左上と右下の正方形を灰色に塗る、という作業を繰り返すと右上の図のようになり、一辺の長さが1㍍の正方形の中に、黒色の正方形と灰色の正方形二つの組がずっと続いています。そして、たくさんの黒色の正方形の面積はそれぞれ



$$\frac{1}{4}、\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}、\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\cdots$$

となっています。また、初めの正方形の面積を黒色の正方形と灰色の正方形二つの組で三等分しているので、黒色の正方形の面積の和は

$$1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\ （平方㍍）$$

と求められます。つまり

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\cdots=\frac{1}{3}$$

です。分母が4の分数をかけてたすと、分母が3になりました。普通のたし算では起こらないことが、無限個の数の和では起きるのは興味深いですね。

【Z会・上田倫也】

！今回の教訓

無限個の数を、正方形の面積に置き換えて、和を考えました。

上田倫也さん　2011年Z会入社。中学・高校生向けの数学の教材編集を担当。のんびり過ごすのが好き。1984年、大阪府堺市生まれ。博士（理学）。