

小学生の進路・進学

「Z会ナビ」が Web サイト でも読めるようになりました!

Z会おとナビ新聞

検索

または <http://www.zkai.co.jp/el/otonavi.html>

これまでの内容も掲載しています!

分かる と 快感!

Z会ナビ

お題

XとYが異なる数のとき、 $\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X}$ は必ず2より大きい。その理由を説明しなさい。

(神戸大学 2012年 数学)

算数

理科

歴史

地理

XやYは異なる数というのですから、たとえば3と5をあてはめてみましょう。 $\frac{3}{5} + \frac{5}{3}$ は、2より大きいでしょうか。

これを通分してたし算すると、 $\frac{3}{5} + \frac{5}{3}$ は、 $\frac{3 \times 3 + 5 \times 5}{5 \times 3}$ 、つまり $\frac{34}{15}$ となります。

一方、2は、 $\frac{30}{15}$ と表せます。34は30より大きいのですから、 $\frac{3}{5} + \frac{5}{3}$ は、確かに2より大きい数ですね。

XとYは、今は3と5でしたが、ほかの数、たとえば、 $\frac{6}{7} + \frac{7}{6}$ や、 $\frac{3}{4} + \frac{4}{3}$ や、 $\frac{7}{3} + \frac{3}{7}$ なども計算してみてください(ただし、XやYは0より大きい数だとします)。

いつも2より大きくなりますね。この理由を考えてみましょう。

問題の手順を、文字を使って表す

それでは、先ほどの「通分してたし算し、分母をそろえて比較する」という手順を、X、Yという文字を使ったまま考えてみましょう。

$\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X}$ というのは、通分してたし算すると、 $\frac{X \times X + Y \times Y}{X \times Y}$ のことです。そして一方、2は $\frac{X \times X + Y \times Y}{X \times Y} > 2$ と書けます。よって、「 $\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X}$ は必ず2より大きい」ということを説明するには、「 $X \times X + Y \times Y$ は、必ず $X \times Y > 2$ より大きい」ということを説明すればよいですね。



イラスト：瑞木匠

図で考えてみる

面積の比較とみると……

かけ算の値を比較するので、面積で考えてみましょう。図1で、 $X \times X + Y \times Y$ というのは灰色の部分の面積です。また、 $X \times Y > 2$ というのは、白い部分の面積です。二分の面積が $X \times Y$ で、それが二つあるからです。

図1では、XのほうがYより大きいため、仕切りの線は中央ではありません。仕切りの線を中央に動かしてみたのが、図2です。

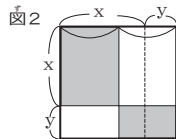
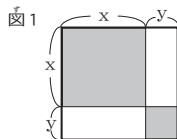
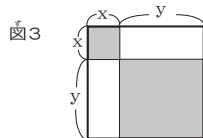


図2では、灰色の部分と白い部分の面積は同じです。これと比べると、図1では、灰色の部分が増えて、白い部分は減りますね。つまり、 $X \times X + Y \times Y$ は、 $X \times Y > 2$ より大きいわけです。こうして、XやYに具体的な数をあてはめなくても、 $\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X}$ が2より大きいことが説明できました。



なお、XとYは異なる数とのことですので、XがYより大きい場合だけでなく、XがYより小さい場合もあります。このときは、図1ではなく、図3のようになりますが、同じようにして説明できますから、ぜひ身近な人などに説明してあげてください。【Z会・宮坂聡】

! 今回の教訓

文字を使えば、具体的な数に関係なく、手順や考え方を説明することができます。



宮坂聡さん 2006年Z会入社。これまで5年間、大学受験用の数学の教材編集を担当。趣味は音楽と読書。妻と2人暮らし。1982年、長野県諏訪市生まれ。