

分 か る と 快 感 !

Z会ナビ

▶算数 理科 歴史 地理

お題

(AのB乗)+(BのA乗)が素数になるのは?

(京都大学 2016年 数学)

「Z会ナビ」が

Webサイト

でも読めます!



Z会おとナビ新聞

検索

これまでの内容も掲載しています!

AをB回かけた数のことを、AのB乗といいます。たとえば

$$(2の3乗) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$(3の2乗) = 3 \times 3 = 9$$

です。また

2、3、5、7、11、13、17、19、...

のように、1とその数自身でしか割り切れない整数のことを、素数といいます。

いま、2つの素数A、Bを選んで

$$(AのB乗) + (BのA乗)$$

を計算すると、素数になりました。このような素数A、Bの組をすべて求めなさい。ただし、 $A < B$ とします。

最も小さいA、Bの組は $A=2$ 、 $B=3$ ですね。このとき

$$(2の3乗) + (3の2乗)$$

$$= 8 + 9 = 17$$

であり、17は素数なので、この組は答えです。実は、この組以外に答えはありません。以下では、このことを確認していきましょう。

(AのB乗) + (BのA乗) は奇数

先程の計算から(AのB乗) + (BのA乗)は17以上の素数であることがわかりました。ところで、2以外の素数は奇数ですね。よって

$$(AのB乗) + (BのA乗) = (\text{奇数})$$

となります。つまり、(AのB乗)と(BのA乗)は、一方が偶数でもう一方が奇数です。ここで、偶数は何回かけても偶数ですし、奇数は



イラスト・瑞樹 匠

小さい数から

何回かけても奇数なので、AとBは、一方が偶数でもう一方が奇数ということがわかります。AとBは素数ですが、偶数の素数は2しかないので、小さい方のAが2となります。

規則性を探す

$A=2$ と決まったので、あとは、Bが5以上の素数のときに

$$(2のB乗) + (Bの2乗)$$

が素数にならないことを確認すればよいですね。具体的に、Bが5、7、11、13のときを調べてみましょう。

$$\begin{aligned} Bが5のときは \\ (2の5乗) + (5の2乗) \\ = 32 + 25 = 57 \end{aligned}$$

となり、57は3で割り切れます。

$$\begin{aligned} Bが7のときは \\ (2の7乗) + (7の2乗) \\ = 128 + 49 = 177 \end{aligned}$$

となり、177は3で割り切れます。

$$\begin{aligned} Bが11のときは \\ (2の11乗) + (11の2乗) \\ = 2048 + 121 = 2169 \end{aligned}$$

となり、2169は3で割り切れます。

$$\begin{aligned} Bが13のときは \\ (2の13乗) + (13の2乗) \\ = 8192 + 169 = 8361 \end{aligned}$$

となり、8361は3で割り切れます。

このように、Bが5以上の素数のときは、(2のB乗)+(Bの2乗)は必ず3で割り切れて、素数にはならないことを示すことができます(2のB乗は3で割ると2余る数、Bの2乗は3で割ると1余る数になります)。こうして、 $A=2$ 、 $B=3$ の組以外に答えがないことが確認できました。【Z会・上田倫也】

! 今回の教訓

答えを見つけることだけでなく、答えが他にないことを確認することも大切です。



上田倫也さん 2011年Z会入社。
中学・高校生向けの数学の教材編集を担当。のんびり過ごすのが好き。1984年、大阪府堺市生まれ。博士(理学)。