


分かる快感!
Z会ナビ
算数 理科 社会

お題
トランプをシャッフルし続けると
(慶応義塾大学 2020年 数学)

スクラッチを使った
プログラミング通信講座、
Z会にて開講中!
Z会スクラッチ 検索

52枚のトランプを、次のようにシャッフルします。

- トランプの山を、上から26枚と残りの26枚の二つに分け、右手に上半分、左手に下半分を持つ。
- 机に、左手→右手→左手→右手→…の順に1枚ずつ落として重ねる。



この方法で8回シャッフルすると、はじめのトランプの山で上から3枚目にあったカードは、上から何枚目になりますか。

1回目のシャッフル



1 27
2 28
3 29

イラスト: 瑞木匠

1回シャッフルすると……

1回シャッフルしたときのカードの並び方はこのようになります。



上半分にあったカードについて考えると、上から1枚目、2枚目、3枚目、…にあったカードが、上から1枚目、3枚目、5枚目、…に移ります。つまり、上から「2をかけて1をひいた数、枚目」に移るわけです。

また、下半分にあったカードについては、上から27枚目、28枚目、29枚目、…にあったカードが、上から2枚目、4枚目、6枚目、…に移っています。つまり、上から「26をひいて2をかけた数、枚目」に移るとわかります。

上から3枚目のカードを追いかけよう

はじめに上から3枚目にあったカードは、1回シャッフルすると、上から、

$$3 \times 2 - 1 = 5 \text{ (枚目)}$$

になります。2回目のシャッフルをすると上から、

$$5 \times 2 - 1 = 9 \text{ (枚目)}$$

3回目のシャッフルをすると、上から、

$$9 \times 2 - 1 = 17 \text{ (枚目)}$$

4回目のシャッフルをすると、上から、

$$17 \times 2 - 1 = 33 \text{ (枚目)}$$

下半分になったので、計算の仕方に注意しましょう。5回目のシャッフルをすると、上から、

$$(33 - 26) \times 2 = 14 \text{ (枚目)}$$

今度は上半分に入りました。6回目のシャッフルをすると、上から、

$$14 \times 2 - 1 = 27 \text{ (枚目)}$$

ふたたび下半分になりました。7回目のシャッフルをすると、上から、

$$(27 - 26) \times 2 = 2 \text{ (枚目)}$$

今度は上半分に来ました。8回目のシャッフルをすると上から、

$$2 \times 2 - 1 = 3 \text{ (枚目)}$$

8回シャッフルすると、はじめに上から3枚目にあったカードは、上から3枚目に戻ってくるとわかりました。

ほかのカードはどうなっている？

先ほどの結果をまとめます。はじめに上から3枚目にあったカードが上から何枚目に移っていったかを書くと、

$$3 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 17 \rightarrow 33 \rightarrow 14 \rightarrow 27 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

となりました。

1回シャッフルしたら、3枚目にあったカードは5枚目に移りました。このことに着目して、最初に5枚目にあったカードが、8回シャッフルすると何枚目に移るか考えてみると、

$$5 \rightarrow 9 \rightarrow 17 \rightarrow 33 \rightarrow 14 \rightarrow 27 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$$

と移っていき、上から5枚目に戻ってくることがわかります。

実はほかのカードについても、8回シャッフルしたあとは元の位置に戻ってきます。つまり、8

回シャッフルしたら並び方がはじめとまったく同じになるのです。いくつか見てみましょう。

上から1枚目にあるカードは、上から、

$$1 \times 2 - 1 = 1 \text{ (枚目)}$$

に移るので、何度シャッフルしても場所が変わりませんから、上から何枚目に移っていったかを書くと、

$$1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1$$

となります。52枚目のカードも場所が変わらず、

$$52 \rightarrow 52 \rightarrow 52 \rightarrow 52 \rightarrow 52 \rightarrow 52 \rightarrow 52 \rightarrow 52 \rightarrow 52$$

となります。これ以外のカードについても、

$$4 \rightarrow 7 \rightarrow 13 \rightarrow 25 \rightarrow 49 \rightarrow 46 \rightarrow 40 \rightarrow 28 \rightarrow 4$$

$$18 \rightarrow 35 \rightarrow 18 \rightarrow 35 \rightarrow 18 \rightarrow 35 \rightarrow 18 \rightarrow 35 \rightarrow 18$$

……

というように調べることができます。ぜひ試してみてくださいね。(Z会・柳田雅史)

今回の教訓

今回のように規則的にシャッフルすると、規則的な変化が起こりました。カードゲームをするときは、カードの並びがわかってしまうのは都合が悪いので、わざと何枚かずつのかたまりで落としたり、別のシャッフルの方法を混ぜたりして不規則に変化させたほうがよいですね。

柳田雅史さん 2004年Z会入社。小学生～高校生向け講座の設計を担当。妻もZ会社員で、このコーナーの内容を家で一緒に考えることも。1979年東京生まれ。