

分かる快感！

Z会ナビ

算数

理科

社会

お題

分数を並べる

(2019年 大阪大学)



おうちで楽しく！
プログラミング通信講座、
Z会にて開講中！

Z会 KOOV 検索

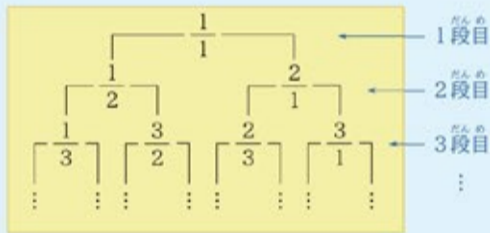
図のように、分数をトーナメント表の形に並べます。まず、決勝戦にあたる一番上の位置に $\frac{1}{1}$ を置き、そのあとは

① $\frac{A}{B}$ の左下は、 $\frac{A}{A+B}$

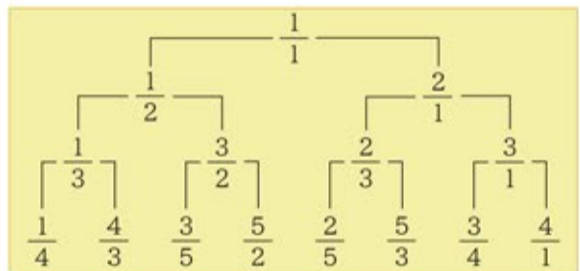
② $\frac{A}{B}$ の右下は、 $\frac{A+B}{B}$

というルールで、上から順に分数を置いていきます。なお、 $\frac{2}{1}$ のように分母が1の分数も、(整数のことですが)このまま分数の形で扱うことにします。

$\frac{19}{44}$ という分数は、このトーナメント表で上から何段目に現れるのでしょうか？



法則をつかむため、トーナメント表を埋めていきましょう。4段目まで埋めるとこうなります。

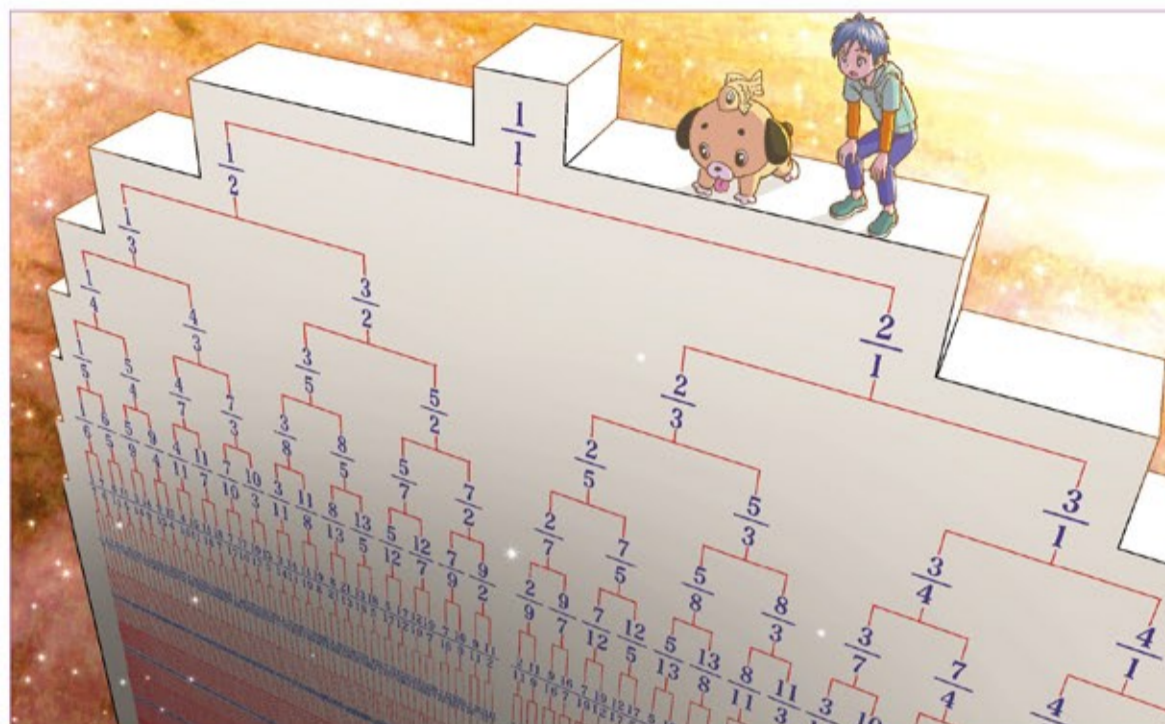


たとえば、 $\frac{1}{3}$ の左下は、 $\frac{1}{1+3}$ つまり $\frac{1}{4}$ です。また、 $\frac{1}{3}$ の右下は、 $\frac{1+3}{3}$ つまり $\frac{4}{3}$ ですね。

上から見るか、下から見るか

その調子でトーナメント表をずっと下の方まで埋めていけば、いつかは $\frac{19}{44}$ が見つかるのでしょうか。しかし、何段目まで埋めればよいかもわからず、膨大な計算をすることになりそうです。たとえば、先ほど4段目まで埋めるだけでも15個の分数を書きましたね。この調子で埋めていくと、5段目までで31個、6段目までで63個とどんどん数が増え、10段目まででは1023個もの分数を書くことになります。

しかも、これがすべて役に立つ計算かというと、そうでもありません。たとえば、4段目には8個の分数があり、ここから下へ下へと伸ばしていけ



イラスト・瑞木匠

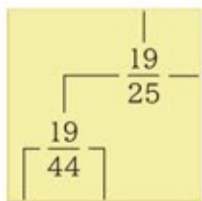
ば、8個のうちのどれかが $\frac{19}{44}$ につながっているのでしょうか。しかし、8個のうちのどれかが $\frac{19}{44}$ につながっているかは、調べてみないとわかりません。そのため、「あたり」以外の7個の分数からつながる部分については、まったくのムダな計算をすることになります。上から全部埋めていくのは、よい作戦とはいえません。

それよりも、逆に $\frac{19}{44}$ から上にたどることを考えましょう。 $\frac{19}{44}$ は、どんな分数をもとにしてつくられるのでしょうか。そして、その「左下」なのでしょうか、それとも「右下」でしょうか？

1段上の分数は

$\frac{19}{44}$ は、「左下」です。なぜなら、ルールに従うと、ある分数の左下の分数は $\frac{A}{A+B}$ という真分数(分母の方が大きい)になり、右下の分数は $\frac{A+B}{B}$ という仮分数(分子の方が大きい)になるからです。 $\frac{19}{44}$ は真分数なので、ある分数の「左下」としてつくられるということですね。

では、何の左下なのでしょうか？ $\frac{19}{44}$ という分数を $\frac{A}{A+B}$ の形にあてはめると、Aは19で、Bは25です。つまり、 $\frac{19}{44}$ の上の段には $\frac{19}{25}$ という分数があり、 $\frac{19}{44}$ はその左下の分数としてつくられたはずだというわけです。



下からさかのぼっていく

続けましょう。 $\frac{19}{25}$ も真分数ですから、ある分数

の「左下」です。そして、何の左下かというのと、 $\frac{A}{A+B}$ の形にあてはめればAは19、Bは6なので、 $\frac{19}{6}$ の左下です。

さあ、今度は仮分数が出てきました。 $\frac{19}{6}$ はある分数の「右下」であり、 $\frac{A+B}{B}$ の形にあてはめるとAは13、Bは6なので、 $\frac{19}{6}$ は $\frac{13}{6}$ の右下です。

これを続けると、 $\frac{19}{44} \rightarrow \frac{19}{25} \rightarrow \frac{19}{6} \rightarrow \frac{13}{6} \rightarrow \frac{7}{6} \rightarrow \frac{1}{6} \rightarrow \frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{1}$ となり、10回で一番上の段の $\frac{1}{1}$ にたどり着きます。つまり、 $\frac{19}{44}$ は11段目に現れるということです。

11段目まですべて埋めていたら、1000個以上のもの分数を書く羽目になるところでした。もし20段目だった場合は、上から埋めていくと100万個もの分数を書くことになります。下からたどるのが賢明ですね。(Z会・宮坂聡)

！ 今の教訓
答えから逆にたどることで、いらぬ部分の計算をせずに済みました。

宮坂聡さん 2006年にZ会入社。理数系やプログラミングの教材編集に携わり、現在は中学生・高校生向けの数学を担当。長野県諏訪市生まれ。