

分かる快感!
Z会ナビ
算数 理科 社会

お題
素数はいくつある?
(一橋大学 2021年 数学)

おうちで楽しく!
プログラミング通信講座、Z会にて開講中!
Z会 KOOV 検索

1とその数自身でしかわり切れない数を、素数といいます。たとえば、3は1と3でしかわり切れないので素数ですが、4は1と4以外に2でもわり切れるので、素数ではありません。ただし、1は素数ではありません。

1から1000までの整数のうち、素数は270個以下であることを説明してください。

実際に、小さい数から順に、素数かどうかを調べてみましょう。

- 1: 素数でない(問題文に書いてある)
- 2: 素数
- 3: 素数
- 4: 2でわり切れるので素数でない
- 5: 素数
- 6: 2と3でわり切れるので素数でない
- 7: 素数
- 8: 2と4でわり切れるので素数でない
- 9: 3でわり切れるので素数でない
- 10: 2と5でわり切れるので素数でない

順番に考えていけば、それぞれが素数かどうかはわかりますが、これを1000まで続けると思うと、気が遠くなりますね。

2でわり切れるなら……

10まで考えた中で、素数ではないものの理由に「2でわり切れるので……」とあるものが多かった、と気づいたでしょうか。そう、2でわり切れる数は、唯一の例外である2以外、素数ではないといえるのです。

このことを使って、「素数ではないもの」に注目する考え方をしてみましょう。つまり、「1000以下の素数は270個以下である」のかわりに、「1000以下で、素数ではないものが730個以上ある」と説明することを目標にするのです。

さて、「2でわり切れるので素数でない」ものについて調べましょう。2以外の、2でわり切れる数がすべてあてはまりますね。つまり、4、6、8、…、1000の499個あるとわかりました。図で表すと、次の色をつけた部分にある数です。

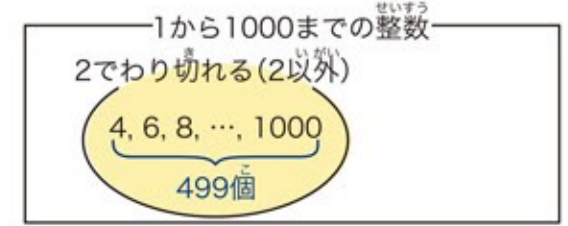


イラスト: 瑞木 匠

3や5でわり切れる数に注目

2ではなく、3でわり切れる数にも注目してみましょう。3でわり切れる数も、3以外は素数ではないといえます。つまり、6、9、12、15、…、999の332個ですね。

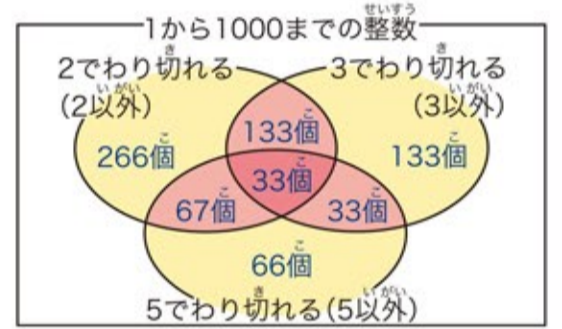
しかし、ここで「499+332=831(個)の、素数でないものが見つかった」としないように注意が必要です。6、12、18、…、996の166個は、2でわり切れる数を調べたときに数えたものだから、ここでも数えたら二重に数えたことになってしまいます。

先ほどの図にかき加えてみると、個数がわかりやすくなります。



ここまでで見つかった、素数でないものの個数は、333+166+166=665(個)ですね。

さらに、5でわり切れる数にも注目してみましょう。5以外の5でわり切れる数は素数ではないといえます。2、3でわり切れるかどうかを調べたものを2回以上数えないように、「2でも3でも5でもわり切れるもの」「2と5ではわり切れるが3ではわり切れないもの」のように分けて数えて図に書き加えます。すると、ここまでで見つかった素数でないものの個数は、266+133+133+67+33+33+66=731(個)になりました。目標達成です。



実際の問題では……

一橋大学で実際に出题された問題は、「1000以下の素数は250個以下であることを示せ」というものでした。269個以下であることを示すところまでは同じですが、ここからさらに19減らさなくてははいけません。7の倍数に注目する、1は素数でないから1を取り除くなど、考え方はいろいろあります。みなさんなら、どのように考えますか? (Z会・柳田雅史)

！
今回の教訓
厳密に個数を求めるのではなく、「〇個以下」であることを示すので、絶対に違うものを数えて取り除く方法が有効でした。ちなみに、1000以下の素数の個数は168個です。

柳田雅史さん 2004年Z会入社。小学生～高校生向け講座の設計を担当。妻もZ会社員で、このコーナーの内容を家で一緒に考えることも。1979年東京生まれ。