図形と方程式 1　1回目
要点学習

QMT5L1-31J1-01

直線にまつわるまとめ

今回は，直線の方程式に関する差のつく $+\alpha$ を学習します。

(1)　直線の方程式は，$y=mx+n$ の形だけでなく，$ax+by+c=0$ の形でも使えるようにする。→点と直線の距離の公式で使うだけでなく，垂直条件，平行条件で強みを発揮する！

(2)「…a の値に関係なく定点を通る…」というときは，a の恒等式と見る。

の 2 点です。この 2 つを具体的に確認しましょう。

【例題 1】

xy 平面上に，直線 $\ell：2x+ay+a-1=0$ と直線 $m：y=3x+2$ がある。この 2 直線が垂直となるような定数 a の値を求めよ。

【普通の解答例】

直線 ℓ を $y=mx+n$ の形に直すと

(i)　$a=0$ のとき

直線 ℓ は $2x-1=0$ で，y 軸に平行な直線であるから直線 m と垂直になることはない。

(ii)　$a\neq 0$ のとき

直線 ℓ は $y=-\dfrac{2}{a}x-1+\dfrac{1}{a}$

これと直線 m が垂直となるので

$$3\times\left(-\frac{2}{a}\right)=-1$$

$$a=6$$

以上より

$\boldsymbol{a=6}$　**(答)**

【$ax+by+c=0$ の形の解答例】

直線 ℓ と直線 $m：3x-y+2=0$ が垂直に交わるので

$$2\times3+a\times(-1)=0$$

これより

$\boldsymbol{a=6}$　**(答)**

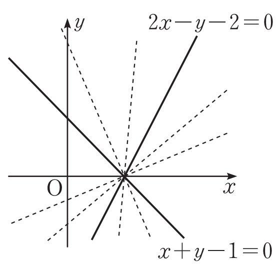
【例題 2】

直線 $(2+k)x+(k-1)y-k-2=0$ は定数 k の値に関係なく，ある定点を通る。この定点の座標を求めよ。

【解答】

求める定点を $(X,\ Y)$ とおくと直線 $(2+k)x+(k-1)y-k-2=0$ の上にあるので

$$(2+k)X+(k-1)Y-k-2=0$$



すべての実数 k でこの式をみたすので，k の恒等式となる。

k について整理して

$$k(X+Y-1)+(2X-Y-2)=0$$

k の恒等式であるから

$$\begin{cases} X+Y-1=0 \\ 2X-Y-2=0 \end{cases}$$

となる。この連立方程式を解いて

$$X=1,\ Y=0$$

よって，求める定点は

(1，0)　(答)

チェック

k を定数とする。xy 平面上に，直線 ℓ：$kx+(k-2)y+3=0$ と直線 m：$y=2x-2$ があるとき，次の各問いに答えよ。

(1)　2つの直線が垂直であるとき，k の値を求めよ。

(2)　2つの直線が平行であるとき，k の値を求めよ。

(3)　直線 ℓ は k の値に関係なくある定点を通る。この定点の座標を求めよ。

解　答

(1)　m の式を $2x-y-2=0$ と変形すると，2つの直線が垂直であるから

$$k\cdot 2+(k-2)\cdot(-1)=0$$

これを解いて

$$\boldsymbol{k=-2}$$ **(答)**

(2)　2つの直線が平行であるから

$$k\cdot(-1)-(k-2)\cdot 2=0$$

これを解いて

$$\boldsymbol{k=\frac{4}{3}}$$ **(答)**

(3)　直線 ℓ を k で整理して

$$k(x+y)+(-2y+3)=0$$

これが k の恒等式となればよいので

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -2y+3=0 \end{cases}$$

これを解いて

$$(x,\ y)=\left(-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

求める点の座標は

$$\boldsymbol{\left(-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)}$$ **(答)**

図形と方程式 1　1回目
要点学習

QMT5L1-H1J1-01

直線にまつわるまとめ

今回は，直線の方程式に関する差のつく $+\alpha$ を学習します。

(1)　直線の方程式は，$y=mx+n$ の形だけでなく，$ax+by+c=0$ の形でも使えるようにする。→点と直線の距離の公式で使うだけでなく，垂直条件，平行条件で強みを発揮する！

(2)「…a の値に関係なく定点を通る…」というときは，a の恒等式と見る。

の 2 点です。この 2 つを具体的に確認しましょう。

【例題 1】

xy 平面上に，直線 ℓ：$2x+ay+a-1=0$ と直線 m：$y=3x+2$ がある。この 2 直線が垂直となるような定数 a の値を求めよ。

【普通の解答例】

直線 ℓ を $y=mx+n$ の形に直すと

(i)　$a=0$ のとき

直線 ℓ は $2x-1=0$ で，y 軸に平行な直線であるから直線 m と垂直になることはない。

(ii)　$a\neq 0$ のとき

直線 ℓ は $y=-\dfrac{2}{a}x-1+\dfrac{1}{a}$

これと直線 m が垂直となるので

$$3\times\left(-\frac{2}{a}\right)=-1$$

$$a=6$$

以上より

$\boldsymbol{a=6}$　**(答)**

【$ax+by+c=0$ の形の解答例】

直線 ℓ と直線 m：$3x-y+2=0$ が垂直に交わるので

$$2\times3+a\times(-1)=0$$

これより

$\boldsymbol{a=6}$　**(答)**

◀ $y=mx+n$ の形では $x=$▲が表現できず，場合分けが必要になっています。それに対して，$ax+by+c=0$ の形はすべての直線を表現できるため，統一的に処理できています。

◀ $a_1x+b_1y+c_1=0$ と $a_2x+b_2y+c_2=0$ の垂直条件と平行条件は

(i)垂直条件は

$a_1a_2+b_1b_2=0$

(ii)平行条件は

$a_1b_2-b_1a_2=0$

【例題 2】

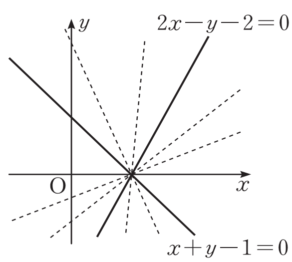
直線 $(2+k)x+(k-1)y-k-2=0$ は定数 k の値に関係なく，ある定点を通る。この定点の座標を求めよ。

【解答】

求める定点を $(X,\ Y)$ とおくと

直線 $(2+k)x+(k-1)y-k-2=0$ の上にあるので

$$(2+k)X+(k-1)Y-k-2=0$$



◀ k の恒等式の処理は

$k(①)+(②)=0$

の形に整理し，①，②ともに 0 になるようにすれば，k の値に関係なく等式が成立する，ということを使っていました。

すべての実数 k でこの式をみたすので，k の恒等式となる。
　k について整理して

$$k(X+Y-1)+(2X-Y-2)=0$$

k の恒等式であるから

$$\begin{cases} X+Y-1=0 \\ 2X-Y-2=0 \end{cases}$$

となる。この連立方程式を解いて

$$X=1,\ Y=0$$

　よって，求める定点は

(1，0)（答）

チェック

　k を定数とする。xy 平面上に，直線 ℓ：$kx+(k-2)y+3=0$ と直線 m：$y=2x-2$ があるとき，次の各問いに答えよ。

(1)　2 つの直線が垂直であるとき，k の値を求めよ。

(2)　2 つの直線が平行であるとき，k の値を求めよ。

(3)　直線 ℓ は k の値に関係なくある定点を通る。この定点の座標を求めよ。

QMT5L1-H1L1-01

解　答

(1)　m の式を $2x-y-2=0$ と変形すると，2つの直線が垂直であるから

$$k\cdot 2+(k-2)\cdot(-1)=0$$

これを解いて

$$\boldsymbol{k=-2}$$　**(答)**

(2)　2つの直線が平行であるから

$$k\cdot(-1)-(k-2)\cdot 2=0$$

これを解いて

$$\boldsymbol{k=\frac{4}{3}}$$　**(答)**

(3)　直線 ℓ を k で整理して

$$k(x+y)+(-2y+3)=0$$

これが k の恒等式となればよいので

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -2y+3=0 \end{cases}$$

これを解いて

$$(x,\ y)=\left(-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

求める点の座標は

$$\boldsymbol{\left(-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)}$$　**(答)**

◀垂直条件は
$a_1a_2+b_1b_2=0$
イメージは“上下でかけ算”です。(ベクトルという単元でも学習します)

◀平行条件は
$a_1b_2-b_1a_2=0$
イメージは“たすきがけ”です。

図形と方程式１　１回目
添削問題

QMT5L1-H1A1-01

※ここからは『Z Study　解答用紙編』の数学「図形と方程式１」１枚目にご記入ください。

1　xy 平面上の直線 $\ell : mx+y+m-3=0$ について，次の各問いに答えよ。

（配点　50）

(1)　直線 ℓ が $x+y+1=0$ と垂直となるような m の値を求めよ。(15 点)

(2)　直線 ℓ は m の値に関係なくある定点を通る。その定点の座標を求めよ。(15 点)

(3)　直線 ℓ と点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$ の距離の最大値と，そのときの m の値を求めよ。(20 点)

図形と方程式１　１回目
添削問題 解答解説

QMT5L1-H1C1-01

1　xy 平面上の直線 ℓ：$mx+y+m-3=0$ について，次の各問いに答えよ。

（配点　50）

(1)　直線 ℓ が $x+y+1=0$ と垂直となるような m の値を求めよ。（15 点）

(2)　直線 ℓ は m の値に関係なくある定点を通る。その定点の座標を求めよ。（15 点）

(3)　直線 ℓ と点 A$(0,\ -1)$ の距離の最大値と，そのときの m の値を求めよ。（20 点）

攻略点

(1)　2 直線が垂直となる条件を思い出す。その際，直線を $y=-x-1$ の形に直さずに処理したい。

(2)　直線 ℓ が m に関係なくある定点を通過するので，それは m の恒等式であるといえる。これを使い，m で整理すればよい。

(3)　点 A と直線 ℓ の距離なので，点と直線の距離の公式がまず思い浮かぶ。これを立式してみて，無理にでも解こうとするのではなく，少し視点を変えることを考えてほしい。まずはどんな状態なのかを把握するため，図を書いてみる。その過程で，(2)が関係のあることに気づければ…。

解　答

(1)　直線 ℓ：$mx+y+m-3=0$ と直線 $x+y+1=0$ が垂直であるから

$$m\cdot 1+1\cdot 1=0$$

これより

$$\boldsymbol{m=-1}\quad\text{（答）}$$

◀$a_1x+b_1y+c_1=0$ と $a_2x+b_2y+c_2=0$ が垂直であるとき，$a_1a_2+b_1b_2=0$ をみたす。

(2)　直線 ℓ：$mx+y+m-3=0$ が m の値に関係なく定点を通るので，m の恒等式とみなし整理すると

$$m(x+1)+(y-3)=0$$

◀この変形が鍵。

これより

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$$

よって，求める定点の座標は

$$\boldsymbol{(-1,\ 3)}\quad\text{（答）}$$

(3)　直線 ℓ は(2)の結果より $(-1,\ 3)$ を通り回転する直線である。この定点を P とし，点 A から直線 ℓ に下ろした垂線の足を H とする。

◀点と直線の距離の公式を用いた方法については「**解説**」参照。

(i)　H が P と異なるときは △AHP ができ，これは直角三角形であるから常に

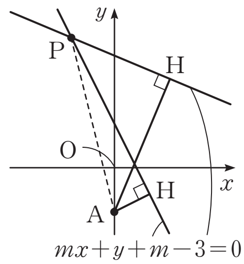
$$\text{AP}>\text{AH}$$

である。

(ii)　H が P と一致するとき

$$\mathrm{AP}=\mathrm{AH}$$

である。



したがって，直線 ℓ と点 A の距離が最大となるのは P と H が一致するときであるから，距離の最大値は

$$\mathrm{AH}=\mathrm{AP}=\sqrt{\{0-(-1)\}^2+(-1-3)^2}=\sqrt{17}$$

また，このとき，直線 ℓ は AP と垂直である。

$$(\text{直線 AP の傾き})=\frac{-1-3}{0-(-1)}=-4$$

$\ell : y=-mx-m+3$ であるから，直線 ℓ の傾きは

$$-m$$

$m=0$ のとき $y=3$ は明らかに AP と垂直ではないので

$$-4\times(-m)=-1$$

$$m=-\frac{1}{4}$$

◀傾きの積が -1 であることを使うので，$m=0$ と $m\neq 0$ で分けて処理することを忘れないように。

したがって，求める距離の最大値とそのときの m の値は

最大値：$\sqrt{17}$　$\left(m=-\frac{1}{4}\text{ のとき}\right)$　（答）

解　説

別解　(3)点と直線の距離の公式を用いる

点と直線の距離の公式を利用することもできる。まず，点と直線の距離の公式を確認しておくと，直線 $ax+by+c=0$ と点 $(p,\ q)$ の距離 d は

$$d=\frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

と表される。これを直線 ℓ と点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$ に用いると

$$d=\frac{|m\cdot 0+1\cdot(-1)+m-3|}{\sqrt{m^2+1^2}}=\frac{|m-4|}{\sqrt{m^2+1}}$$

両辺を２乗し，分母を払い整理すると

$$(d^2-1)m^2+8m+d^2-16=0 \quad \cdots\cdots ①$$

この m の方程式が実数解をもつような d の範囲が求める範囲であるから，判別式 D をとって

$$\frac{D}{4}=4^2-(d^2-1)(d^2-16)\geqq 0$$

$$-d^4+17d^2\geqq 0$$

$$d^2(d^2-17)\leqq 0$$

$d\geqq 0$ より

$$d^2-17 \leqq 0$$
$$0 \leqq d \leqq \sqrt{17}$$

したがって，d の最大値は $\sqrt{17}$ とわかり，これをもとの方程式①に戻して m を求める。ここまでで相当手間がかかるから，ぜひ「**解答**」のような考え方をできるようになってほしい。

高校　iPad　難関　数学

解　答　用　紙

QRコードで個別管理しているため氏名の記入は不要です。

Z-KAI

1／4枚目
QMT5J1-H1D2

総得点 32／50

この答案の添削有効期限は 9999年99月99日 です。

※解答は、濃く、はっきりとご記入ください。

図形と方程式１　1回目
添削問題

QMT5J1-H1C2

1　xy 平面上の直線 $\ell: mx+y+m-3=0$ について，次の各問いに答えよ。

（配点 50）

(1)　直線 ℓ が $x+y+1=0$ と垂直となるような m の値を求めよ。(15 点)

(2)　直線 ℓ は m の値に関係なくある定点を通る。その定点の座標を求めよ。(15 点)

(3)　直線 ℓ と点 A$(0,\ -1)$ の距離の最大値と，そのときの m の値を求めよ。(20 点)

1	15／15
2	14／15
3	3／20

(1) $\ell: mx+y+m-3=0$

$mx+y+m-3=0$

$y=-mx-m+3$

$x+y+1=0$

$y=-x-1$

よって，$-m\times(-1)=-1$

$\underline{m=-1}$ //

(2) $\ell: mx+y+m-3=0$

$mx+y+m-3=0$

$\underline{m(x+1)+y-3=0}$　この変形がポイントです！よくできています。

よって，

$x+1=0\ ,\ y-3=0$

$\underline{x=-1,\ y=3}$ //

(−1, 3)（答）
定点の座標を求めるので，座標の形で答えましょう。　−1

添削指導欄

「解答」のように，2直線の垂直条件から求めることもできます。確認しておきましょう。

垂直条件
$a_1x+b_1y+c_1=0$
$a_2x+b_2y+c_2=0$
が垂直のとき，
$a_1a_2+b_1b_2=0$ をみたす。

「定点を通ることから，mの恒等式とみなせる」ということを明記して，このことを示すとよいでしょう。

数学

解答は裏面に続けて書いて構いません

今回の添削問題以外の質問は「教えてＺ会！」で受け付けています。※質問方法は「学習ガイド」でご確認ください。

答案感想欄

(3)が難しかったので，くわしく教えてください。
なぜ距離はdで表すのですか？

距離のdは英語のdistanceの頭文字ですね。長さのlはlength，高さのhはheightなど，英語の頭文字からとっているものが多いです。

解答時間［ 40 ］分

添削者からのオススメ復習用教材

要点学習2回目　例題2

添削者より

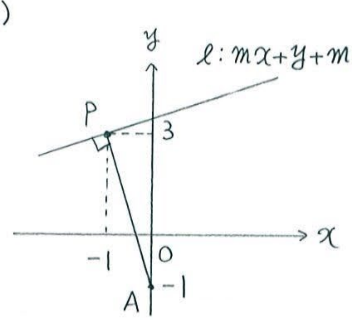
(3)では，まず定点Pを通る直線をいくつか書いてみて状態を把握します。APと直線ℓとの関係によって各々考察しましょう。
また，点と直線の距離の公式を使わない方法をしっかり確認しておきましょう。難関校対策として，計算の処理量を減らす工夫を意識するようにしましょう。

添削者名　今川

テキストスタイルでご受講中の講座の解答解説は，翌月 20 日ごろにお届けする予定です。冊子が届く前にご覧になりたい場合は，Ｚ会 MyPage の［スタディルーム］よりご確認ください。

---

(3)



AP⊥ℓのとき，　+3

APの傾き4より　-4

$-m=-\frac{1}{4}$ ∴ $m=\frac{1}{4}$　　$\frac{1}{4}$　　$-\frac{1}{4}$

$\ell : \frac{1}{4}x+y+\frac{1}{4}-3=0$ と A(0,−1)

の距離は

$$d=\frac{\left|\frac{1}{4}\cdot 0+1\cdot(-1)-\frac{11}{4}\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+1^2}}=\frac{\frac{15}{4}}{\sqrt{\frac{17}{16}}}$$

$$=\frac{15}{\sqrt{17}}=\frac{15\sqrt{17}}{17}$$

よって，

最大値 $\frac{15\sqrt{17}}{17}$

そのときのmの値は $\frac{1}{4}$ //

垂直となる場合を考察する方針はよいです。
下記(★)の考察もしましょう。

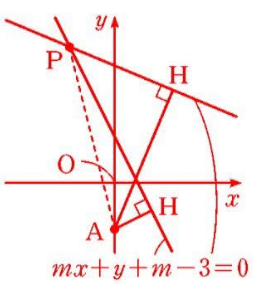
APの傾きを間違えているので，以降の計算も誤りです。注意しましょう。

点と直線の距離の公式を使うと計算が複雑になるため，APに着目して，

$$d=\mathrm{AP}$$
$$=\sqrt{(-1)^2+\{3-(-1)\}^2}$$
$$=\sqrt{17}$$

と求めましょう。

このように，APを直角三角形の斜辺としてとらえる見方を身につけると，計算量を減らすことができますね。



(★)
左図のように
AP⊥ℓではない場合についても
考える必要があります。
点Aから直線ℓに下ろした垂線の足をHとすると，△AHPは直角三角形なので
常に AP＞AH ですね。

このことと，AP⊥ℓの場合との考察をふまえて求める距離の最大値を決定しましょう。