図形と方程式 1　1 回目
添削問題

QMT5L1-S1A1-01

※ここからは『Z Study　解答用紙編』の数学「図形と方程式 1」1 枚目にご記入ください。

1　次の各問いに答えよ。（配点　50）

(1)　3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(7,\ 4)$，$\mathrm{C}(4,\ -2)$ について，

(i)　線分 AB を $2:1$ に内分する点 D の座標を求めよ。（8 点）

(ii)　線分 BC を $3:2$ に外分する点 E の座標を求めよ。（8 点）

(iii)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心 G の座標を求めよ。（8 点）

(2)　2 点 $\mathrm{A}(-4,\ 1)$，$\mathrm{B}(5,\ -8)$ から等距離にある x 軸上の点 F の座標を求めよ。（8 点）

(3)　xy 平面上に点 $\mathrm{A}(6,\ 6)$ と直線 $\ell : x+2y-8=0$ がある。このとき，

(i)　点 A を通り，直線 ℓ に垂直な直線の方程式を求めよ。（9 点）

(ii)　点 A を直線 ℓ に関して対称移動した点 A' の座標を求めよ。（9 点）

図形と方程式1　1回目
添削問題 解答解説

QMT5L1-S1C1-01

1　次の各問いに答えよ。(配点　50)

(1)　3点A$(-2,\ 4)$，B$(7,\ 4)$，C$(4,\ -2)$について，

(i)　線分ABを2：1に内分する点Dの座標を求めよ。(8点)

(ii)　線分BCを3：2に外分する点Eの座標を求めよ。(8点)

(iii)　△ABCの重心Gの座標を求めよ。(8点)

(2)　2点A$(-4,\ 1)$，B$(5,\ -8)$から等距離にあるx軸上の点Fの座標を求めよ。

(8点)

(3)　xy平面上に点A$(6,\ 6)$と直線ℓ：$x+2y-8=0$がある。このとき，

(i)　点Aを通り，直線ℓに垂直な直線の方程式を求めよ。(9点)

(ii)　点Aを直線ℓに関して対称移動した点A′の座標を求めよ。(9点)

攻略点

(1)　座標平面上の2点P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$に対し，線分PQを$m:n$に内分する点は

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)\quad\cdots\cdots①$$

線分PQを$m:n\,(m\neq n)$に外分する点は

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)\quad\cdots\cdots②$$

さらに，R$(x_3,\ y_3)$とすると，△PQRの重心は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)\quad\cdots\cdots③$$

これらを利用して，題意の点の座標を求めてみよう。

(2)　2点P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$に対し，PQ間の距離は

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\quad\cdots\cdots④$$

として得られる。求める点Fはx軸上の点であるから，y座標が0であることに注意して，x座標をxなどとおき，④を利用してxに関する方程式を立式する方針で考えてみよう。

(3)(i)　直線ℓの傾きはすぐにわかるので，2直線の垂直条件を考えれば，求める直線の傾きも求められる。あとは，点$(x_1,\ y_1)$を通り，傾きmの直線の方程式が

$$y-y_1=m(x-x_1)\quad\cdots\cdots(☆)$$

と表せることを利用すればよい。

(ii)　2点A，A′が直線ℓに関して対称であることを立式できるように，うまく読み替えよう。ここでは

・直線AA′は直線ℓと垂直である

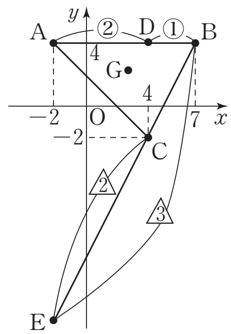
・線分AA′の中点Mは直線ℓ上にある

と言い換えて立式するのがコツ。このとき，1つ目の条件は点A′が(i)で求めた直

線上にあることに他ならないことに気づいてほしい。

解　答

(1)(i)　点Dは線分ABを2：1に内分する点であるから，内分点の公式より



$$\mathrm{D}\left(\frac{1\cdot(-2)+2\cdot 7}{2+1},\ \frac{1\cdot 4+2\cdot 4}{2+1}\right)$$

◀「**攻略点**」の①。

∴　**D(4，4)**　**(答)**

(ii)　点Eは線分BCを3：2に外分する点であるから，外分点の公式より

$$\mathrm{E}\left(\frac{-2\cdot 7+3\cdot 4}{3-2},\ \frac{-2\cdot 4+3\cdot(-2)}{3-2}\right)$$

◀「**攻略点**」の②。

∴　**E(−2，−14)**　**(答)**

(iii)　△ABCの重心Gの座標は

$$\mathrm{G}\left(\frac{(-2)+7+4}{3},\ \frac{4+4+(-2)}{3}\right)$$

◀「**攻略点**」の③。

∴　**G(3，2)**　**(答)**

(2)　求める点Fはx軸上の点であるから，F$(x,\ 0)$とおくと，2点間の距離の公式より

$$\mathrm{AF}=\sqrt{\{x-(-4)\}^2+(0-1)^2}$$
$$=\sqrt{x^2+8x+17}$$

◀「**攻略点**」の④。

$$\mathrm{BF}=\sqrt{(x-5)^2+\{0-(-8)\}^2}$$
$$=\sqrt{x^2-10x+89}$$

AF＝BFより，$\mathrm{AF}^2=\mathrm{BF}^2$であるから

$$x^2+8x+17=x^2-10x+89$$
$$8x+10x=89-17$$
$$18x=72$$

◀ $\sqrt{x^2+8x+17}=\sqrt{x^2-10x+89}$ の両辺を2乗して，根号をはずした。

∴　$x=4$

◀ここで終わらないこと。

したがって，求める点Fの座標は

F(4，0)　**(答)**

(3)(i)　直線ℓの方程式は$y=-\dfrac{1}{2}x+4$であるから，求める直線の傾きをaとすると，直線ℓと垂直なので

◀傾きがわかる形に変形する。

$$a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \qquad \therefore\ \ a=2$$

◀傾きがm，m'の2直線が垂直のとき
$mm'=-1$

また，点A(6，6)を通るから，求める直線の方程式は

$$y-6=2(x-6)$$

◀「**攻略点**」の(☆)。

∴　$\boldsymbol{y=2x-6}$　**(答)**

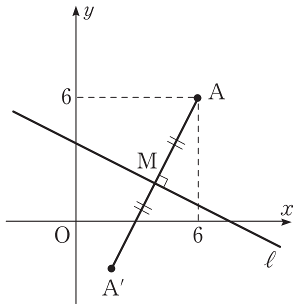
(ii)　点 A′ の x 座標を t とおくと，点 A′ は(i)で求めた直線上にあるから

$$A'(t,\ 2t-6)\quad\cdots\cdots①$$

と表せる。よって，線分 AA′ の中点 M は

$$M\left(\frac{t+6}{2},\ \frac{(2t-6)+6}{2}\right)$$

$$\therefore\quad M\left(\frac{t+6}{2},\ t\right)$$



◀これで，「**攻略点**」の1つ目の条件を立式したことになる。

と表せる。点 M は直線 ℓ 上にあるから

$$\frac{t+6}{2}+2\cdot t-8=0$$

$$5t-10=0\qquad\therefore\quad t=2$$

よって，①より，求める点 A′ の座標は

A′(2,　−2)　　(答)

◀これで，「**攻略点**」の2つ目の条件を立式したことになる。

解　説

別解 (3)(ii)内分と外分を読み替える

「**解答**」の点 M は，直線 ℓ と直線 AA′ の交点に他ならない。したがって，$x+2y-8=0$ と $y=2x-6$ を連立させて解くことにより

$$x=4,\quad y=2$$

$$\therefore\quad M(4,\ 2)$$

と求められる。ここで

“点 M は線分 AA′ を 1：1 に内分する点(すなわち，中点)”

を

“点 A′ は線分 AM を 2：1 に外分する点”

と読み替えれば，外分点の公式より

$$A'\left(\frac{(-1)\cdot6+2\cdot4}{2-1},\ \frac{(-1)\cdot6+2\cdot2}{2-1}\right)\qquad\therefore\quad A'(2,\ -2)\quad(答)$$

と処理することもできる。