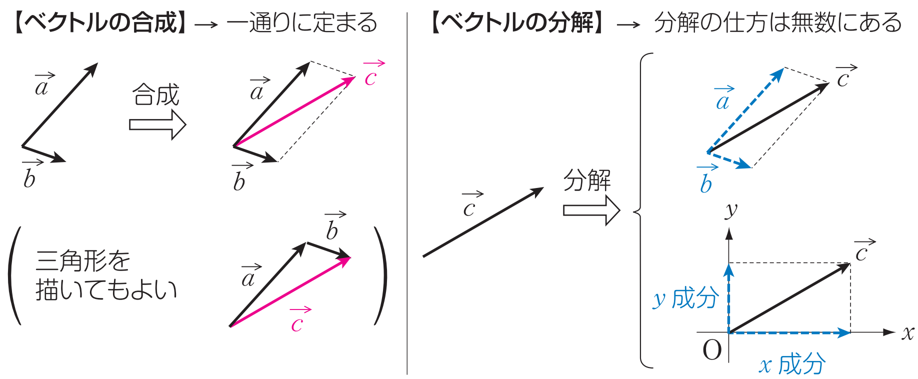
2次元の力学　1回目
要点学習

QQT5A1-Z1J1-01

2次元の力学　第1回

要点1　ベクトルの合成と分解

物理では，速度や力などのように，**大きさと向き**をもつ**ベクトル量**が多く登場する。ベクトルの合成と分解では，次のように平行四辺形を作図して考えるとわかりやすい。

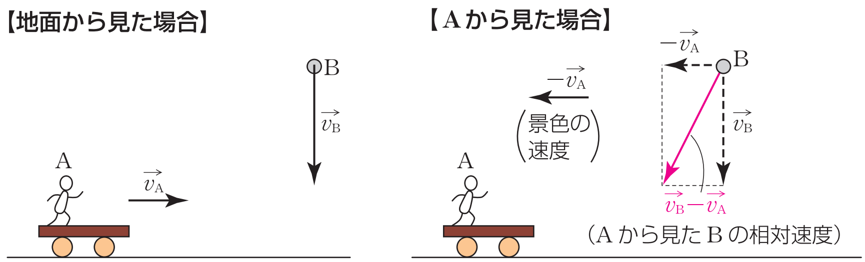


要点2　相対速度

物体Aが速度 $\vec{v_A}$，物体Bが速度 $\vec{v_B}$ で運動している場合，物体Aから見た物体Bの相対速度 $\vec{v}$ は，次のように表される。

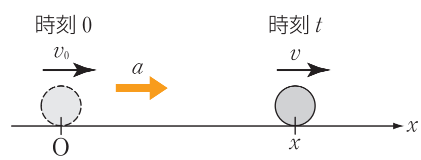
$$\boxed{\vec{v}=\vec{v_B}-\vec{v_A}}$$

言葉で表すと，［**Aから見たBの相対速度**］＝［**Bの速度**］－［**Aの速度**］ということである。



要点3　等加速度運動

物体が x 軸に沿って，初速度 v_0，加速度 a の等加速度運動をする場合，時刻 $t=0$ から時刻 t までの物体の変位を x，時刻 t の瞬間の物体の速度を v とすると，等加速度運動の式は次のように表される。



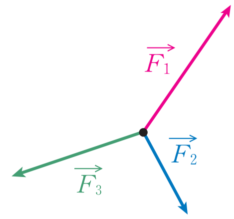
- $v=v_0+at$
- $x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$
- $v^2-v_0{}^2=2ax$

要点4　力のつり合い

一つの物体が複数の力 $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$, …を受けた状態で静止しているとき,「**物体が受ける力はつり合っている**」という。このとき，力のつり合いの式は次のように表される。

$$\boxed{\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\cdots=\vec{0}}$$

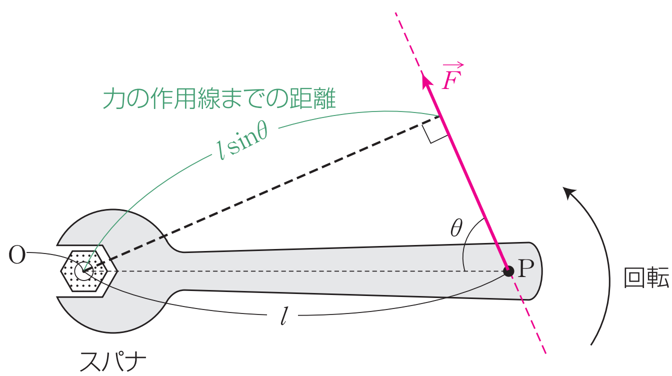
【3つの力がつり合っている場合】



要点5　力のモーメント

物体に働く力が物体を回転させるとき，この回転を起こす作用のことを，**力のモーメント**という。

右図のようなスパナの持ち手である点Pに，大きさ F の力 $\vec{F}$ が作用している場合について考える。回転軸点Oをとり，OP間の距離を l，線分OPと $\vec{F}$ とのなす角度を $\theta(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ とすると，$\vec{F}$ の点Oまわりの力のモーメントの大きさ M は，次のように表される。



$$\boxed{M=F\cdot l\sin\theta}$$

言葉で表すと，**[モーメントの大きさ]＝[力の大きさ]×[回転軸から力の作用線までの距離]**ということである。力のモーメントの符号は，回転させようとする向きが反時計回りのときは正，時計回りのときは負とすることが多い。

要点6　剛体のつり合い

大きさをもち，力を受けても変形しない理想的な物体を，**剛体**という。

剛体が複数の力 $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$, …を受けた状態で静止しているとき，ある点まわりの $\vec{F_1}$ のモーメントを M_1, $\vec{F_2}$ のモーメントを M_2, …とすると，剛体が静止する条件は，次のように表される。

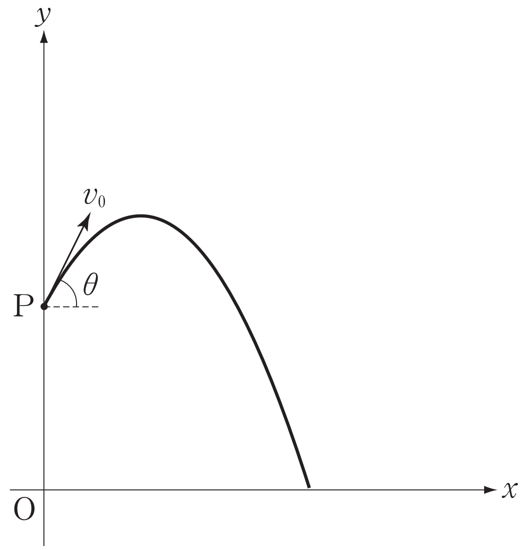
$$\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\cdots=\vec{0}\quad\text{（剛体が並進しない条件）}$$
$$M_1+M_2+M_3+\cdots=0\quad\text{（剛体が回転しない条件）}$$

なお，**剛体が静止しているときは，任意の点のまわりのモーメントの和が0**である（どの点のまわりのモーメントを考えても0である）。このため，力のモーメントについて考える際は，できるだけ計算が楽になるように着目する点を決めればよい。

※ここからは『Z Study　解答用紙編』の物理「２次元の力学」２枚目にご記入ください。

2

図のように，空間内のある点を原点Ｏとして水平右向きを正とする x 軸，鉛直上向きを正とする y 軸をそれぞれとる。この xy 平面内において，y 軸上の点Ｐから，反時計回りを正として，$+x$ 向きと角度 θ $(0<\theta<\pi/2)$ をなす向きに速さ v_0 で小球を発射する場合について考える。小球を発射した瞬間を時刻 $t=0$，重力加速度の大きさを g とし，以下の問いに答えよ。ただし，点Ｐの座標は $(0, 3v_0{}^2/(4g))$ であるものとする。　(25 点)



問１　小球は，発射された後，放物線を描いて運動する。小球の発射位置の座標に注意して，時刻 t の瞬間における小球の位置の x 座標，y 座標をそれぞれ求めよ。

(６点)

問２　小球が描く放物線を表す方程式を，t を含まずに，x，y を含む１つの式で表せ。

(６点)

問３　$\theta=\pi/4$ の場合，小球が描く軌道の最高点の x 座標，y 座標をそれぞれ求めよ。

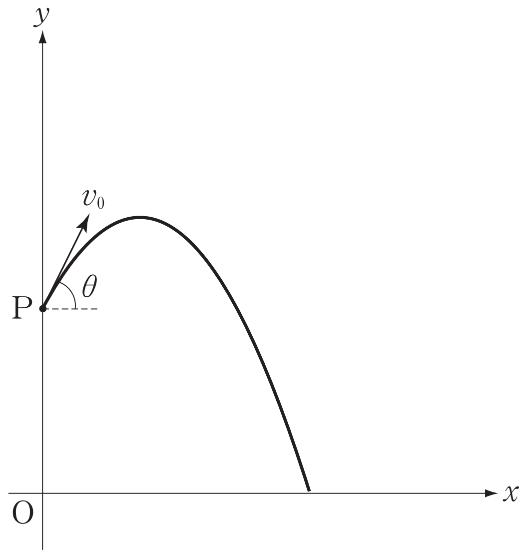
(６点)

問４　次に，θ の値を変化させる場合について考える。小球を発射するのと同時に，観測者Ａが点Ｐから自由落下するものとして，Ａが原点Ｏを通過する瞬間の，Ａから見た小球の速さを求めよ。また，この瞬間の小球の位置の x 座標を x_1 として，θ を変化させる場合に x_1 がとり得る値の範囲を求めよ。　(７点)

2

《鉛直面内の運動》

図のように，空間内のある点を原点Oとして水平右向きを正とする x 軸，鉛直上向きを正とする y 軸をそれぞれとる。この xy 平面内において，y 軸上の点Pから，反時計回りを正として，$+x$ 向きと角度 θ（$0<\theta<\pi/2$）をなす向きに速さ v_0 で小球を発射する場合について考える。小球を発射した瞬間を時刻 $t=0$，重力加速度の大きさを g とし，以下の問いに答えよ。ただし，点Pの座標は $(0,\ 3v_0{}^2/(4g))$ であるものとする。　(25 点)



問１　小球は，発射された後，放物線を描いて運動する。小球の発射位置の座標に注意して，時刻 t の瞬間における小球の位置の x 座標，y 座標をそれぞれ求めよ。

（6 点）

問２　小球が描く放物線を表す方程式を，t を含まずに，x，y を含む１つの式で表せ。

（6 点）

問３　$\theta=\pi/4$ の場合，小球が描く軌道の最高点の x 座標，y 座標をそれぞれ求めよ。

（6 点）

問４　次に，θ の値を変化させる場合について考える。小球を発射するのと同時に，観測者Aが点Pから自由落下するものとして，Aが原点Oを通過する瞬間の，Aから見た小球の速さを求めよ。また，この瞬間の小球の位置の x 座標を x_1 として，θ を変化させる場合に x_1 がとり得る値の範囲を求めよ。　（7 点）

ポイント

鉛直面内の運動は，水平成分と鉛直成分の運動に分けて考えるとよい。小球が重力のみを受けて運動している間，水平方向の運動は等速度運動であり，鉛直方向の運動は等加速度運動である。

[見本] 高校コース　本科　物理　解答解説

解　答

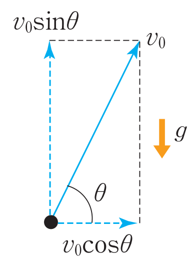
問１　$x=v_0t\cos\theta$，$y=\dfrac{3{v_0}^2}{4g}+v_0t\sin\theta-\dfrac{1}{2}gt^2$

問２　$y=\dfrac{3{v_0}^2}{4g}+x\tan\theta-\dfrac{gx^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta}$　　**問３**　$x=\dfrac{{v_0}^2}{2g}$，$y=\dfrac{{v_0}^2}{g}$

問４　速さ：v_0，範囲：$0<x_1<\dfrac{\sqrt{6}\,{v_0}^2}{2g}$

解　説

以下では，物理量の各成分は，座標の正の向きを正とする。



問１　この場合，小球の x 方向の運動は速度 $v_0\cos\theta$ の等速度運動である。よって，求める x 座標は

$$x=\boldsymbol{(v_0\cos\theta)\times t}\qquad\textbf{(答)}\quad\cdots\cdots①$$

また，小球の y 方向の運動は初速度 $v_0\sin\theta$，加速度 $-g$ の等加速度運動である。よって，求める y 座標は

$$y=\boldsymbol{\frac{3{v_0}^2}{4g}+(v_0\sin\theta)\times t-\frac{1}{2}gt^2}\qquad\textbf{(答)}\quad\cdots\cdots②$$

問２　x，y の両方が t の関数で表されることを利用して，y を x の関数として表す。①より，t は x を用いて以下のように表される。

$$t=\frac{x}{v_0\cos\theta}$$

上式を②に代入すると

$$\boldsymbol{y}=\frac{3{v_0}^2}{4g}+(v_0\sin\theta)\times\frac{x}{v_0\cos\theta}-\frac{1}{2}g\times\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2$$

$$=\boldsymbol{\frac{3{v_0}^2}{4g}+x\tan\theta-\frac{gx^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta}}\qquad\textbf{(答)}$$

問３　**問２**の結果に，$\theta=\pi/4$ を代入し，平方完成すると

$$y=\frac{3{v_0}^2}{4g}+x\tan\frac{\pi}{4}-\frac{gx^2}{2{v_0}^2\cos^2(\pi/4)}$$

$$=\frac{3{v_0}^2}{4g}+x\times1-\frac{gx^2}{2{v_0}^2\times(1/\sqrt{2})^2}$$

$$=-\frac{g}{{v_0}^2}\left(x-\frac{{v_0}^2}{2g}\right)^2+\frac{{v_0}^2}{g}$$

上式より，小球が描く軌道の最高点の x 座標，y 座標はそれぞれ

$$x=\frac{\boldsymbol{v_0}^2}{2\boldsymbol{g}},\qquad y=\frac{\boldsymbol{v_0}^2}{\boldsymbol{g}}\qquad \textbf{(答)}$$

補足 軌道の最高点とは，x の二次関数である y が極大となる点である。この点を求めるため，平方完成した。

問４　時刻 t における小球の速度の x 成分，y 成分をそれぞれ v_x，v_y とすると

$$v_x=v_0\cos\theta \quad\cdots\cdots③$$

$$v_y=v_0\sin\theta-gt \quad\cdots\cdots④$$

一方，A は x 方向には運動をしないので，時刻 t における A の速度の x 成分を V_x とすると

$$V_x=0 \quad\cdots\cdots⑤$$

また，時刻 t における A の速度の y 成分を V_y とすると，A の y 方向の運動は，初速度 0，加速度 $-g$ の等加速度運動であるから，等加速度運動の式より

$$V_y=-gt \quad\cdots\cdots⑥$$

③～⑥より，時刻 t における A から見た小球の速度（A に対する小球の相対速度）の x 成分，y 成分はそれぞれ

x 成分：　$v_x-V_x=v_0\cos\theta-0=v_0\cos\theta$

y 成分：　$v_y-V_y=v_0\sin\theta-gt-(-gt)=v_0\sin\theta$

よって，A から見た小球の速度は時刻によらないことがわかる。したがって，求める速さは

$$\sqrt{(v_0\cos\theta)^2+(v_0\sin\theta)^2}=\boldsymbol{v_0}\qquad \textbf{(答)}$$

　また，A が原点 O を通過する瞬間の時刻を $t=t_1$ とすると，等加速度運動の式より

$$0=\frac{3{v_0}^2}{4g}-\frac{1}{2}g{t_1}^2\qquad \therefore\quad t_1=\frac{\sqrt{6}\,v_0}{2g}$$

上式と①より，x_1 は

$$x_1=(v_0\cos\theta)\times\frac{\sqrt{6}\,v_0}{2g}=\frac{\sqrt{6}\,{v_0}^2}{2g}\cos\theta$$

よって，x_1 のとり得る範囲は，$0<\theta<\pi/2$ のとき，$0<\cos\theta<1$ であることより

$$\frac{\sqrt{6}\,\boldsymbol{v_0}^2}{2\boldsymbol{g}}\times\mathbf{0}<\boldsymbol{x_1}<\frac{\sqrt{6}\,\boldsymbol{v_0}^2}{2\boldsymbol{g}}\times\mathbf{1}\qquad \textbf{(答)}$$

補足 A から見た小球の速度は，時刻によらず一定であり，小球が発射された直後の A から見た小球の速度に等しい。

高校　iPad　物理

QRコードで個別管理しているため氏名の記入は不要です。

解　答　用　紙

禁無断転載

Z-KAI

2／4枚目
QQT5A1-Z1D2

総得点 18／25

※解答は、濃く、はっきりとご記入ください。

2次元の力学　4回目
添削問題

2　QQT5A1-Z1C2

②▶ ◀②

1　4／6

問1　〈考え方〉

x方向：等速度運動　$x = v_0 t\cos\theta$ OK

y方向：等加速度運動　$y = v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$ ＋ ×

初期座標（$t=0$での座標$y=\frac{3v_0^2}{4g}$）を忘れています。

答　$x=$ $v_0 t\cos\theta$，$y=$ $v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$ ＋ × -2

2　3／6

問2　〈考え方〉

問1のx, yよりtを消去

①▶ ◀①

答　$y = x\tan\theta - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos\theta}$　-3

問1のy座標ミスによるミス（－3）
正しいy座標を用いて求め直しましょう。

3　5／6

問3　〈考え方〉

問2のθに$\theta=\frac{\pi}{4}$を代入して，$y = x - \dfrac{gx^2}{v_0^2} = -\dfrac{g}{v_0^2}\left(x - \dfrac{v_0^2}{2g}\right)^2 + \dfrac{v_0^2}{4g}$

したがって，軌道最高点のx, y座標は　$x = \dfrac{v_0^2}{2g}$　$y = \dfrac{v_0^2}{4g}$ ×

解答方針はOK。
問1のy座標ミスの影響です。

答　$x=$ $\dfrac{v_0^2}{2g}$，$y=$ $\dfrac{v_0^2}{4g}$ -1

最高点が最初のy座標より低いのはおかしいと気付きたかったですね。

裏面につづく

物理

[見本] 高校コース　本科　物理　添削見本

今回の添削問題以外の質問は「教えてZ会！」で受け付けています。※質問方法は「学習ガイド」でご確認ください。

答案感想欄	添削者からのオススメ復習用教材
結構できたかも	要点学習 $\boxed{\text{要点3}}$ 等加速度運動
	添削者より
教科書・参考書等を使って解きましたか(はい・いいえ) 授業でこの範囲をもう習いましたか(はい・いいえ)	問1のミスを引きずってしまいました。物理の入試問題では，このように，大問の最初の方のミスが後の設問の点数に影響します。大問の最初の方の設問は念入りに見直しをしましょう。今回の単元の内容は概ね理解できています。

添削者名：三島

テキストスタイルでご受講中の講座の解答解説は，翌月20日ごろにお届けする予定です。冊子が届く前にご覧になりたい場合は，Z会 MyPage の[スタディルーム]よりご確認ください。

4

6/7

問4　〈考え方〉

Aと小球には全く同じ加速度が働くため、相対速度は初めからずっと変化しない。したがって、Aが原点を通過する瞬間も、その大きさは v_0 である。OK

実際にAの原点通過時の速度について立式し，相対速度を式の上で求めて確認しましょう。

Aが原点を通過する時刻を t_1 として、$0 = \dfrac{3v_0^2}{4g} - \dfrac{1}{2}gt_1^2$　$t_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2g}v_0$ OK

このときの x_1 座標は $x_1 = v_0\cos\theta \times \dfrac{\sqrt{6}}{2g}v_0 = \dfrac{\sqrt{6}}{2g}v_0^2\cos\theta$ OK

θ の範囲は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ だから $0<\cos\theta<1$. より OK

転記ミス（－1）
添え字を忘れています。

答　速さ：v_0　，範囲：$0 < x < \dfrac{\sqrt{6}}{2g}v_0^2$　-1