ポイントはこちら

前の設問の利用を考えてみる

今回の題材は次の(2)だ。

整数 p, q ($p \geqq q \geqq 0$) に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお $0! = 1$ とする。

(1) n, k が 0 以上の整数のとき,

$$ {}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right) $$

を計算し, n によらない値になることを示せ。

(2) m が 3 以上の整数のとき, 和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ。

（千葉大）

(1)は与えられた二項係数の定義を利用して計算すれば

$$ {}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right) = \frac{k}{k+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\flat) $$

となることが示せる。困るのは(2)だ。二項係数の逆数の和には計算公式がない。定義を代入しても, シグマを用いて表してもうまくいかない。ここで注目してほしいのが前の設問(1)である。(1)は二項係数に関する等式($\flat$)を示した。(2)にも同じ二項係数が出てくるわけで,「何とか(2)に利用できないだろうか?」と考えてみよう。すると, (2)は「和を求める」ということと $\left(\dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right)$ の部分が「1 つずれた値の差」となっていることから

$$ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right) $$
$$ = 1 - \frac{1}{n+1} $$

が頭によぎるはず。つまり, この括弧の中身は同じようにして和を求めることができるわけだ。

このことを踏まえてじゃまな部分を右辺にもっていくと

$$ \frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}} $$

と二項係数の逆数が登場。そこで, 右辺の組合せが ${}_{\bigcirc}\mathrm{C}_3$ となるように $k=2$ を代入すると

$$ \frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3} $$

両辺の $n=0$ から $n=m-3$ までの和をとれば

$$ \sum_{n=0}^{m-3} \left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \frac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \frac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_3} \right) $$

これより与えられた和は次のように求めることができる。

$$ \frac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \frac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \frac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_3} = \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{m-3} \left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2} \right) $$
$$ = \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2} \right) + \left(\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{{}_{m-1}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2} \right) \right\} $$
$$ = \frac{3}{2} \left\{ 1 - \frac{2}{m(m-1)} \right\} $$