添削問題解答解説

微積分

XMAD7A-11C1-01

1 問題

a を実数の定数とする。x の 3 次関数 $f(x)=x^3+3ax^2+6ax$ について，次の各問いに答えよ。 (25 点)

(1) $f(x)$ が極値をもつとき，a のとり得る値の範囲を求めよ。 (4 点)

(2) $f(x)$ を $f'(x)$ で割ったときの余りを求めよ。ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表すものとする。 (4 点)

(3) $f(x)$ は $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をそれぞれとるとする。$f(\alpha)-f(\beta)=12\sqrt{3}$ のとき，a の値を求めよ。 (17 点)

ポイント

3 次関数の極値を題材とした問題で，数式処理の工夫も問われるもの。

(1) 3 次関数の極値を考察するので

導関数の符号を調べ，増減を捉える

のが基本である。つまり，$f'(x)$ を求め，その符号を調べるわけだが，$f'(x)$ は 2 次関数であるから，$f(x)$ が極値をもつためには，2 次方程式 $f'(x)=0$ がどのような条件をみたせばよいか？

(2) 実際に割り算を行えばよい。

(3) α，β は a を用いて表せるので

$f(\alpha)-f(\beta)$ を a で表す

という方針でよい。直接，$f(x)$ の式に α や β の値を代入するとかなり計算が面倒になってしまうので，ここは工夫して処理したい。そこで

α，β が 2 次方程式 $f'(x)=0$ の解である（◀1）

ことに着目して，(2)を活用するのがうまい。

解　答

(1) $f(x)=x^3+3ax^2+6ax$ より

$$f'(x)=3x^2+6ax+6a$$
$$=3(x^2+2ax+2a) \quad \cdots\cdots ①$$

$f(x)$ が極値をもつとき，2 次方程式 $f'(x)=0$ が相異なる 2 つの実数解をもつ。よって，$x^2+2ax+2a=0$ の判別式を D とすると

◀このように読み替えるのがポイント。

$$\frac{D}{4}=a^2-2a=a(a-2)$$

であり，$D>0$ が成り立てばよいから，a のとり得る値の範囲は

$a<0$ または $2<a$ 答 $\cdots\cdots ②$

(2) ①より，$f(x)$ は

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}x+\frac{a}{3}\right)f'(x)+(4a-2a^2)x-2a^2 \quad \cdots ③$$

と変形できるので，$f(x)$ を $f'(x)$ で割ったときの余りは

$(4a-2a^2)x-2a^2$ 答

◀$f(x)$ を $f'(x)$ で割ると

商：$\frac{1}{3}x+\frac{a}{3}$

余り：$(4a-2a^2)x-2a^2$

となる。

(3)　$f(x)$ の x^3 の係数が正であり，$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとるので，②のもとで $\alpha<\beta$ である。α，β は 2 次方程式 $f'(x)=0$ の相異なる 2 つの実数解であるから

$$\alpha=-a-\sqrt{a^2-2a},\ \beta=-a+\sqrt{a^2-2a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

となる。ここで，$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ と③より

$$f(\alpha)=(4a-2a^2)\alpha-2a^2$$
$$f(\beta)=(4a-2a^2)\beta-2a^2$$

であり，④より

$$\alpha-\beta=-2\sqrt{a^2-2a}$$

であるから

$$\begin{aligned}f(\alpha)-f(\beta)&=2(2a-a^2)(\alpha-\beta)\\&=4(a^2-2a)\sqrt{a^2-2a}\\&=4(a^2-2a)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

したがって，$f(\alpha)-f(\beta)=12\sqrt{3}$ より

$$(a^2-2a)^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}=3^{\frac{3}{2}}$$
$$\therefore\quad a^2-2a=3$$

すなわち

$$(a+1)(a-3)=0$$

②より，求める a の値は

$$\boldsymbol{a=-1,\ 3}$$ 答

となる。

◀1
α，β が 2 次方程式 $f'(x)=0$ の解であることを利用する。

◀③において，$x=\alpha$ を代入すると，$f'(\alpha)=0$ であるから
$f(\alpha)$
$=\left(\frac{1}{3}\alpha+\frac{a}{3}\right)f'(\alpha)$
$\quad+(4a-2a^2)\alpha-2a^2$
$=(4a-2a^2)\alpha-2a^2$
β についても同様である。

◀$a<0$ または $2<a$ をみたす。

解　説

1 別解 **(3)解と係数の関係を用いて …**

「**解答**」では，極値を求める際，割り算を用いて次数を下げる工夫をしているが，この他の処理の方法を紹介しておこう。

α，β は 2 次方程式 $x^2+2ax+2a=0$ の解であるから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-2a,\ \alpha\beta=2a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

が成り立つ。そこで

$$\begin{aligned}f(\alpha)-f(\beta)&=(\alpha^3-\beta^3)+3a(\alpha^2-\beta^2)+6a(\alpha-\beta)\\&=(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}+3a(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+6a(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

と変形して ⑤ を代入すると

$$\begin{aligned}f(\alpha)-f(\beta)&=(\alpha-\beta)(4a^2-2a)-6a^2(\alpha-\beta)+6a(\alpha-\beta)\\&=(4a-2a^2)(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

となり，あとは「**解答**」のように $\alpha-\beta$ を計算して代入すればよい。

なお

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=4a^2-8a\end{aligned}$$
$$\therefore\quad \alpha-\beta=-2\sqrt{a^2-2a}\quad(\because\quad \alpha<\beta)$$

と処理することもできる。

2 別解 (3) $\boldsymbol{f(\alpha)-f(\beta)}$ と $\boldsymbol{f'(x)}$ をつなぐ関係に着目して …

$$f(\alpha)-f(\beta)=\Big[\,f(x)\Big]_{\beta}^{\alpha}=\int_{\beta}^{\alpha}f'(x)dx$$

という見方に気づけば，次のように処理することもできる。つまり，α，β は 2 次方程式 $f'(x)=0$ の 2 解であるから，$f'(x)$ の最高次の係数が 3 であることに注意して

$$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$$

と表せる。これより

$$f(\alpha)-f(\beta)=\int_{\beta}^{\alpha}3(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{3}{6}(\alpha-\beta)^3$$
$$=-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^3$$

あとは，$\alpha-\beta=-2\sqrt{a^2-2a}$ を代入すれば「**解答**」と同じ結果が導ける。

極　意

・計算がラクになるような式処理の工夫を心がけよ

本問では極値の計算がラクになるように，考え方を(2)で誘導している。これは“次数下げ”という手法であり，誘導なしでも行えるようにしておこう。

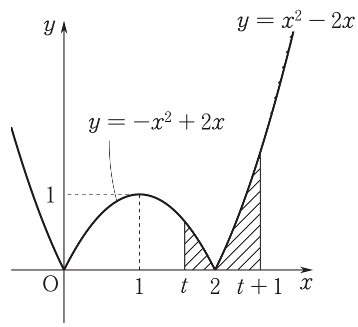
（例）関数 $f(t)=\displaystyle\int_{t}^{t+1}|x(x-2)|\,dx$ について

(1)　$1\leqq t\leqq 2$ のとき $f(t)$ を求めよ。

(2)　$1\leqq t\leqq 2$ のとき $f(t)$ の最小値を求めよ。　（東北学院大・一部改題）

（解答）

(1)　$1\leqq t\leqq 2$ のとき，$f(t)$ は右の図の斜線部分の面積であるから



$$f(t)=\int_{t}^{2}-x(x-2)\,dx+\int_{2}^{t+1}x(x-2)\,dx$$
$$=\Big[-\frac{x^3}{3}+x^2\Big]_{t}^{2}+\Big[\frac{x^3}{3}-x^2\Big]_{2}^{t+1}$$
$$=-\left(\frac{8}{3}-\frac{t^3}{3}\right)+4-t^2$$
$$+\frac{(t+1)^3}{3}-\frac{8}{3}-\{(t+1)^2-4\}$$
$$=\frac{2}{3}t^3-t^2-t+2\qquad（答）$$

(2)　(1)より

$$f'(t)=2t^2-2t-1$$

であるから，$1\leqq t\leqq 2$ における $f(t)$ の増減は右の表のようになり，$t=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ のとき，$f(t)$ は極小かつ最小になる。ここで

t	1		$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

$$f(t)=\left(\frac{t}{3}-\frac{1}{6}\right)f'(t)-t+\frac{11}{6}$$

であるから，求める最小値は

$$f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{11}{6}=\frac{8-3\sqrt{3}}{6}\qquad（答）$$